INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND DRITTES HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 23. Juni 1958

Postverlagsort Berlin

Preis DM 11,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35

Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 13 01 31

Inhalt:

Seite

Karas, K., Die Auswölbungen der Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck. Zweite Mitteilung: Inhomogener Spannungszustand. Mit 7 Abbildungen 157

Tamate, O., Einfluß eines Kreisloches auf die Durchbiegung einer dünnen Halbebene. Mit 3 Abbildungen 181

Lippmann, H., Begründung einer auf Kristallplastizität beruhenden mathematischen Plastizitätstheorie. Mit 5 Abbildungen 187

Malkin, I., The Elastic Problem of a Homogeneous Circular Ring Acted Upon by Equally Spaced Concentrated Twists of Equal Magnitude. 16 Figures 198

Tameroğlu, S., Torsionsschwingungen von Scheiben mit Exponentialprofil. Mit 1 Abbildung 212

Isay, W.-H., Ergänzungen zur Theorie des Voith-Schneider-Propellers. Mit 5 Abbildungen 220

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND DRITTES HEFT 1958

Die Auswölbungen der Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck*

Zweite Mitteilung: Inhomogener Spannungszustand**

Von K. Karas

1. Einleitung. Während in der ersten Mitteilung[1] sowohl bei der Kreis- als auch der Kreisringmembran ein homogener Spannungszustand vorausgesetzt wurde, bei dem also für alle Schnittrichtungen senkrecht zur Membran und für alle Membranpunkte die gleiche Spannungsgröße S vorhanden ist, soll hier ein wohl achsensymmetrischer, aber inhomogener Ausgangsspannungszustand vorausgesetzt werden, dessen Hauptschnittgrößen mit S_r für Schnitte senkrecht zum Halbmesser r und mit S_φ für Schnitte in r bezeichnet werden mögen. Wie in der früheren Arbeit soll auch hier der Außenrand der Kreisringmembran als fest angenommen werden, während der Innenrand derselben als fest oder vollkommen frei beweglich vorausgesetzt wird, wodurch sogleich die auch in der ersten Arbeit berechneten, praktisch wichtigen Grenzfälle mit erfaßt werden können. Sie konnten als Spezialfälle des allgemeineren Falles elastisch gelagerter Innenkreisplatte erwiesen werden, wobei elastische Lagerung wieder sowohl gegen Verschieben, als auch gegen Verdrehen derselben gefordert wurde, um möglichst allgemeine Verhältnisse zu erfassen. Auch wurden für die beiden erwähnten Grenzfälle in zwei Zahlenbeispielen die Höhenlinien der Membranwölbflächen, sowie die Volumina ihrer Wölbungshügel berechnet und die Höhenlinien und Meridianschnitte wieder in anschaulichen Schichtenplänen dargestellt. Alle Ergebnisse, die sich wiederum in geschlossener Form darbieten, konnten für den Fall eines homogenen Ausgangsspannungszustandes durch die der ersten Arbeit verifiziert werden.

2. Der inhomogene, achsensymmetrische Spannungszustand. Bei ihm genügen bekanntlich[2] die auf die konstante Membrandicke bezogenen Schnittgrößen S_r und S_φ den Gleichungen

$$S_r = B - \frac{C}{r^2}, \qquad S_\varphi = B + \frac{C}{r^2} \tag{1a, b}$$

und die beiden Konstanten B und C werden durch die innerhalb gewisser Grenzen willkürlichen Werte von S_r am Außen- bzw. Innenrand der Membran bestimmt; diese sind

$$\text{für} \quad r = r_a: \quad S_r = S_a, \qquad \text{für} \quad r = r_i: \quad S_r = S_i. \tag{2a, b}$$

Mit (2a, b) folgt[3] aus (1a)

$$B = \frac{S_a r_a^2 - S_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}, \qquad C = (S_a - S_i)\,\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}. \tag{3a, b}$$

Späterhin wird sich die Einführung der abkürzenden Konstanten

$$a^2 = \frac{C}{B} = \frac{(S_a - S_i)\, r_a^2 r_i^2}{S_a r_a^2 - S_i r_i^2} \tag{4}$$

---

* Meinem verehrten Kollegen, Herrn Prof. Dr. *Alwin Walther*, zum 60. Geburtstag gewidmet.

** Der Verf. wurde bei der Zeichnung der Abbildungen und bei der Berechnung der Tabellen von Herrn Dipl.-Ing. *K. E. Meier-Dörnberg* in dankenswerter Weise unterstützt.

[1] *K. Karas*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 359. Im folgenden kurz mit I zitiert.

[2] Man vgl. etwa *A. Föppl*, Vorlesungen über Techn. Mechanik, Bd. III, 14. Aufl., S. 331—335.

[3] Die bekannte Formel $\sigma_\varphi = p\,r/\delta$ für die Normalspannung längs einer Erzeugenden eines Zylinders, der einem Innendruck p unterworfen ist, kann leicht aus (1b) und (3a, b) für kleine Wandstärken δ abgeleitet werden. Mit $r_i = r$, $r_a = r + \delta$, $S_i = -p\,\delta$ und $S_a = 0$ erhält man

$$r_a^2 - r_i^2 = 2\,r\,\delta, \qquad B = p\,\delta\,\frac{r^2}{2\,r\,\delta} = \frac{p\,r}{2}, \qquad C = p\,\delta\,\frac{r^4}{2\,r\,\delta} = p\,\frac{r^3}{2};$$

damit ergibt (1b): $S_\varphi = p\,r$, somit $\sigma_\varphi = \frac{S_\varphi}{\delta} = p\,\frac{r}{\delta}$. Man vgl. auch *M. M. Filonenko-Boroditsch*, Festigkeitslehre, Bd. 2, S. 76—82.

als nützlich erweisen. Neben den radialen Schnittgrößen S_a und S_i an den Membranrändern sind noch die tangentialen Schnittgrößen S_{φ_a} und S_{φ_i} ebendort von Bedeutung. Man erhält [1] aus (1b) mit 3a, b) und für die Randwerte r_a bzw. r_i von r wie in (2a, b)

$$S_{\varphi_a} = \frac{S_a (r_a^2 + r_i^2) - 2 S_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}, \qquad S_{\varphi_i} = \frac{2 S_a r_a^2 - S_i (r_a^2 + r_i^2)}{r_a^2 - r_i^2}. \tag{5a, b}$$

Während bei der Scheibe und dem dickwandigen Hohlzylinder S_a und S_i in gewissen, durch die Festigkeit des Materials vorgeschriebenen Grenzen beliebig gewählt werden können, ist dies bei Membranen, die nur Zugspannungen übertragen können, nicht ohne weiteres möglich. Man wird also neben positiven Randwerten für S_r, nämlich für

$$S_a > 0\,, \quad S_i \geqq 0 \tag{6a, b}$$

(S_i kann in der Grenze auch verschwinden) auch weiterhin für alle Membranpunkte positive Werte der Hauptschnittgrößen fordern müssen:

$$S_r = \frac{S_a r_a^2 - S_i r_i^2 - (S_a - S_i)\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}}{r_a^2 - r_i^2} > 0\,, \qquad S_\varphi = \frac{S_a r_a^2 - S_i r_i^2 + (S_a - S_i)\frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}}{r_a^2 - r_i^2} > 0 \tag{7a, b}$$

für $r_i \leqq r \leqq r_a$.

S_r und S_φ sind nach (7a, b) monoton ab- oder zunehmende Funktionen. [Man vgl. auch Abb. 2.] Daher ist zunächst wegen (6a, b) auch (7a) verbürgt. Auch (7b) ist erfüllt, wenn in (5a, b) $S_{\varphi_a} > 0$ und $S_{\varphi_i} > 0$ befunden wird. Mit der Abkürzung

$$\mu = \frac{r_a}{r_i} > 1 \tag{8}$$

folgt daher aus (5a, b)

$$S_a > S_i \frac{2 r_i^2}{r_a^2 + r_i^2} \qquad \text{bzw.} \qquad S_a \geqq S_i \frac{r_a^2 + r_i^2}{2 r_a^2}.$$

($S_{\varphi i}$ kann in der Grenze auch verschwinden). Mit (8) soll also

$$S_a > S_i \frac{2}{\mu^2 + 1}\,, \quad S_a \geqq S_i \frac{\mu^2 + 1}{2\mu^2} = S_i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu^2}\right) \tag{9a, b}$$

sein. Man erkennt leicht, daß die Erfüllung von (9b) auch die von (9a) bedingt. Es ist nämlich

$$\frac{\mu^2 + 1}{2\mu^2} - \frac{2}{\mu^2 + 1} = \frac{(\mu^2 + 1)^2 - 4\mu^2}{2\mu^2(\mu^2 + 1)} = \frac{(\mu^2 - 1)^2}{2\mu^2(\mu^2 + 1)} > 0\,.$$

Ist also (9b) erfüllt, so weisen in allen Membranpunkten die Schnittgrößen aller Schnittrichtungen nur positive Normalspannungen auf. Außer den Beschränkungen (6a, b) und (9b) unterliegt die Wahl von S_a und S_i keinen weiteren Bedingungen [2]. Auf jeden Fall befindet sich ein Membransektor (Abb. 1) im Gleichgewichte gegen Verschieben in der r-Richtung; denn die in der φ-Richtung ist wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie des Ausgangsspannungszustandes ohnehin erfüllt. Das Gleichgewicht in der r-Richtung erfordert (nach Weglassung des Faktors $d\varphi$)

$$S_a r_a - \int_{r_i}^{r_a} S_\varphi\, dr - S_i r_i = 0\,. \tag{10}$$

Wegen $\int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r^2} = \frac{r_a - r_i}{r_a r_i}$ ergibt sich aus (7b)

$$\int_{r_i}^{r_a} S_\varphi\, dr = \frac{(S_a r_a^2 - S_i r_i^2) + (S_a - S_i) r_a \cdot r_i}{r_a + r_i}\,,$$

und damit erkennt man die Erfüllung von (10).

Ein praktisch manchmal auftretender Grenzfall eines inhomogenen statischen Spannungszustandes einer Kreisringmembran liegt dann vor, wenn ihr Innenrand frei ist. Mit $S_i = 0$ und

[1] Auch die maximale Schubschnittgröße $T_{max} = 1/2\,(S_{\varphi i} - S_i)$ am Innenrande $r = r_i$ kann manchmal interessieren; man erhält mit d als Membrandicke

$$T_{max} = d \cdot \tau_{max} = \frac{(S_a - S_i) r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\,.$$

[2] Es sei ausdrücklich erwähnt, daß nach (9) $S_a \gtrless S_i$ sein kann.

$S_a > 0$ ist dann auch (9a, b) erfüllt, und man erhält aus (7a, b) speziell:

$$S_r = S_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right), \qquad S_\varphi = S_a \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right). \tag{11a, b}$$

Schließlich erweist man, daß wegen (4) im ganzen Intervall (7) von r die Funktion

$$1 - \frac{a^2}{r^2} = \frac{S_a r_a^2 (r^2 - r_i^2) + S_i r_i^2 (r_a^2 - r^2)}{(S_a r_a^2 - S_i r_i^2) r^2} > 0 \tag{12}$$

ist, sobald (9b) erfüllt wird. Denn der Zähler in (12) ist wegen (6a, b) stets positiv und für den Klammerfaktor des Nenners folgt wegen (9b)

$$S_a r_a^2 - S_i r_i^2 \geqq S_i\left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{2} - r_i^2\right) = S_i \frac{r_a^2 - r_i^2}{2} > 0\,.$$

Statt (12) kann man auch

$$a^2 < r^2 \tag{12a}$$

schreiben.

Hingegen kann im selben Intervall und unter den gleichen Voraussetzungen die Funktion

$$1 - \frac{r^2}{a^2} = -\frac{S_a r_a^2 (r^2 - r_i^2) + S_i r_i^2 (r_a^2 - r^2)}{(S_a - S_i) r_a^2 r_i^2} \gtrless 0 \tag{13}$$

sein, je nachdem, ob wegen

$$S_a - S_i \geqq S_i\left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{2 r_a^2} - 1\right) = -S_i \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 r_a^2} < 0 \tag{13a}$$

die Differenz $(S_a - S_i)$ positiv oder negativ ist[1]; dann bestehen die Ungleichungen

$$S_{zul} > S_a > S_i \quad \text{oder} \quad (S_a - S_i) > 0\,,$$

$$S_{zul} > S_i > S_a \geqq S_i \frac{\mu^2 + 1}{2\mu^2} \quad \text{oder} \quad (S_a - S_i) < 0\,.$$

S_{zul} ist dabei durch die Festigkeit des Membranmaterials bedingt. Im obigen Grenzfall $S_i = 0$ ist wegen (6) sicher $S_a - S_i > 0$ und daher nach (13) $1 - r^2/a^2 < 0$; dies erkennt man auch daran, daß dann (4) $a^2 = r_i^2$ ergibt und also $1 - r^2/a^2 = (r_i^2 - r^2)/r_i^2 < 0$ ist. Im andern Grenzfall gilt in (9b) das Gleichheitszeichen, wozu (5b) $S_{\varphi_i} = 0$ ergibt; dann aber ist nach (13a) $S_a - S_i < 0$ und somit nach (13) $1 - r^2/a^2 > 0$; dies bestätigt man auch wieder durch (4), das dann $a^2 = -r_i^2$ ergibt, wonach $1 - r^2/a^2 = (r_i^2 + r^2)/r_i^2 > 0$ ist. In beiden Grenzfällen ist natürlich mit $a^2 = \pm r_i^2$ auch (12a) und somit (12) erfüllt. Im ersten Grenzfall verschwindet somit die Radialspannung S_i, im zweiten die tangentiale Spannung S_{φ_i} am Innenrandkreise.

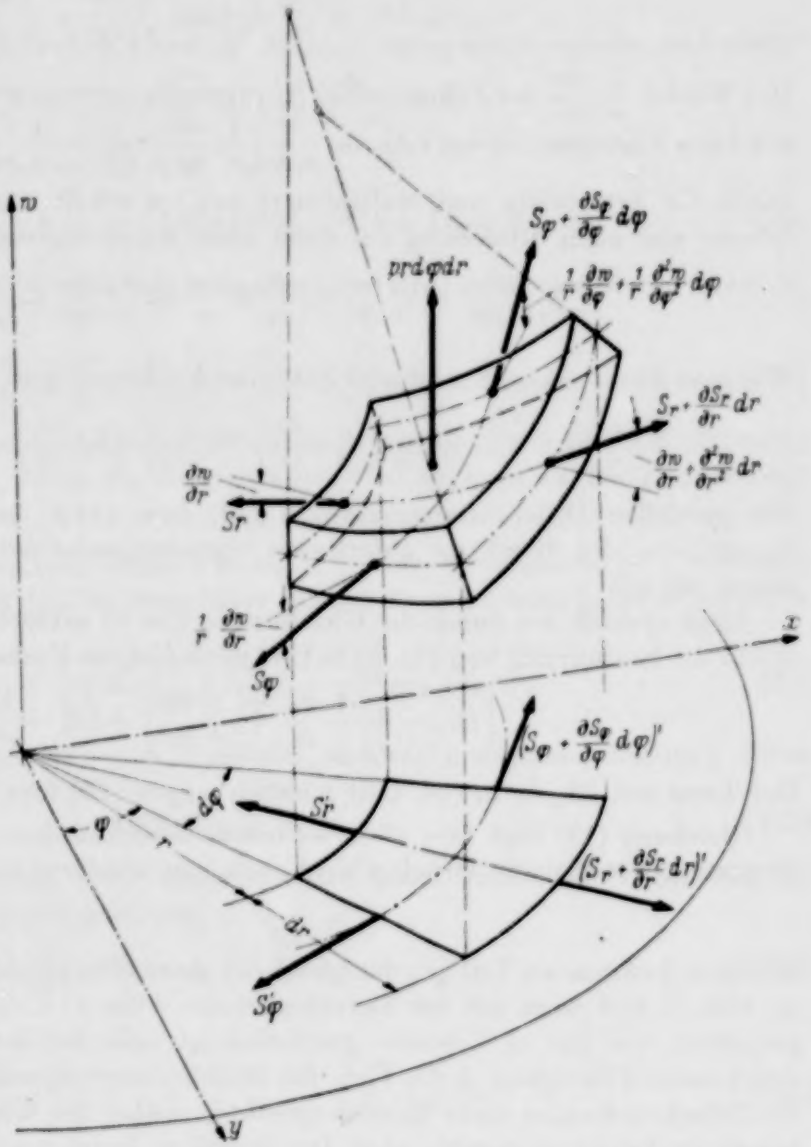

Abb. 1. Ein Membranelement mit den an ihm angreifenden Schnittkräften.

Liegt schließlich als wichtiger Spezialfall ein homogener Spannungszustand vor, so ist $S_r = S_\varphi = S$ und somit nach (1a, b) $B = S$ und $C = 0$, was auch aus (3a, b) folgt. Auch aus (5a, b) ergibt sich dann $S_{\varphi_a} = S_{\varphi_i} = S$, und zu demselben Ergebnis führen auch die Gleichungen (7a, b). Nach (4) ist im Falle eines homogenen Spannungszustandes stets $a = 0$.

[1] Man vgl. Fußnote 2 von S. 158.

Für alle zulässigen Membran-Spannungszustände ist somit der Inhomogenitätsfaktor a^2 auf das folgende Intervall beschränkt:

$$-r_i^2 \leqq a^2 \leqq +r_i^2 . \tag{13b}$$

3. Die Grundgleichungen des Auswölbproblems. Diese sollen unter Betrachtung des Gleichgewichtes eines Membranelementes zunächst für irgend einen allgemeinen Ausgangsspannungszustand $S_r(r,\varphi)$ und $S_\varphi(r,\varphi)$ abgeleitet und erst nachträglich für den in Ziff. 2 angegebenen achsensymmetrischen Spannungszustand spezialisiert werden.

Betrachtet man das Gleichgewicht des in Abb. 1 dargestellten Membranelementes, das in Richtung w einem Flächendruck $p(r,\varphi)$ ausgesetzt ist, so erhält man

$$-S_r \sin\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) r\,d\varphi + \left(S_r + \frac{\partial S_r}{\partial r}dr\right)\sin\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}dr\right)(r+dr)\,d\varphi - S_\varphi \sin\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)dr$$
$$+\left(S_\varphi + \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi}d\varphi\right)\sin\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}d\varphi\right)dr + p\,r\,d\varphi\,dr = 0 .$$

Der Winkel $\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$ der Schnittgröße S_φ gegen die unverzerrte Membranebene vergrößert sich nämlich beim Fortschreiten um $r\,d\varphi$ um $\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) r\,d\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}d\varphi$. Ersetzt man die sin-Funktionen durch die Argumente und multipliziert aus, so erhält man nach Weglassung der sich tilgenden Glieder und nach Streichung des dann allen Termen gemeinsamen Faktors $dr\,d\varphi$

$$S_r\,r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + S_r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial r}\,r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_\varphi}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + p\,r = 0 . \tag{14}$$

Wie man leicht erkennt, gestattet (14) eine Umformung in die selbstadjungierte Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(S_r\,r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(S_\varphi\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) + p\,r = 0 . \tag{14a}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (14) bzw. (14a) beschreiben die Auslenkung $w(r,\varphi)$ für irgendeinen, der Membran auferlegten Spannungszustand S_r, S_φ und für irgendeinen Flächendruck $p(r,\varphi)$.

Liegt speziell der durch die Gleichungen (1a, b) erklärte *Lamé*sche Spannungszustand vor, so ergibt die Einführung von (1a, b) in (14) nach einigen Umformungen und Teilung durch r

$$\left(B + \frac{C}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \left(B - \frac{C}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + p = 0 . \tag{15}$$

Der Term mit $\partial S_\varphi/\partial\varphi$ in (14) fällt nämlich wegen (1b) fort.[1]

Gleichung (15) liegt nun allen weiteren Berechnungen zugrunde. Der hier durchweg vorausgesetzte hydrostatische Druck p wird auch hier wieder gemäß der Gleichung

$$p = p' + p'' = \gamma h + \gamma\, r\cos\varphi \tag{16}$$

in einen konstanten Teil p', der gleich ist dem Flüssigkeitsdruck γh im Membranmittelpunkt 0 (I. Abb. 1) und einen mit der Tiefenlage unter 0 um $y = r\cos\varphi$ linear veränderlichen Teil p'' aufgespalten, wie das in I bereits geschehen ist. Hierbei bedeutet γ das spezifische Gewicht der drückenden Flüssigkeit, h die Tiefe des Membranmittelpunktes 0 unter dem Spiegel, und r, φ sind die Polarkoordinaten eines Membranpunktes, wobei der Winkel φ vom vertikalen Membrandurchmesser (y-Achse) an gezählt wird. Der Druck p' bedingt achsensymmetrische, d. h. nur von r abhängige Auslenkungen w', während p'' bzgl. der horizontalen x-Achse antimetrische Auslenkungen w'' bedingt, die außer von r auch von φ abhängig sind. Wegen der Linearität der Differentialgleichung (15) ergibt sich die Gesamtauslenkung w durch Überlagerung der Teilauslenkungen w' und w'' (die Striche bedeuten also hier keine Ableitungen):

$$w(r,\varphi) = w'(r) + w''(r,\varphi) . \tag{17}$$

[1] Ersetzt man in (15) B durch P, ferner C durch $-c$ und p durch $-\varepsilon\,\partial^2 w/\partial t^2$ mit ε als Flächendichte (*Reinstein* S. 9) und φ durch p (*Reinstein* Fußnote 1 von Seite 102), so erhält man

$$\left(P - \frac{c}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right) + \left(P + \frac{c}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \varepsilon\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .$$

Diese Gleichung ist auf anderem Wege in der bemerkenswerten Göttinger Dissertation als Gl. (206) S. 124 abgeleitet von *E. Reinstein*, Untersuchungen über die Transversalschwingungen der gleichförmig gespannten, elliptisch oder kreisförmig begrenzten Vollmembran... Göttingen, 1911.

a) Ermittlung der achsensymmetrischen, Auslenkung w'. Wegen

$$\frac{\partial w'}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 w'}{\partial \varphi^2} = 0$$

erhält man aus (15) nach entsprechender Umformung analog (14a)

$$\frac{d}{dr}\left[\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{dw'}{dr}\right] + \gamma\, h\, r = 0\,. \tag{18}$$

In (18) läßt sich ersichtlich eine erste Integration leicht durchführen, und man erhält mit D_1 als erster Integrationskonstanten

$$\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{dw'}{dr} + \frac{1}{2}\gamma\, h\, r^2 + D_1 = 0 \tag{19}$$

bzw. mit (4)

$$B\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\frac{dw'}{dr} + \frac{1}{2}\gamma\, h\, r^2 + D_1 = 0\,. \tag{19a}$$

In (19) kann die Trennung der veränderlichen r und w' leicht vorgenommen werden und ergibt

$$dw' + \frac{1}{2}\frac{\gamma\, h}{B}\, r\, dr + \left(\frac{1}{2}\gamma\, h\frac{C}{B} + D_1\right)\frac{r\, dr}{B\,r^2 - C} = 0\,.$$

Mit D_2 als zweiter Integrationskonstanten erhält man hieraus

$$w' + \frac{1}{4}\frac{\gamma\, h}{B}\, r^2 + \left(\frac{1}{4}\gamma\, h\frac{C}{B^2} + \frac{D_1}{2\,B}\right)\ln|B\,r^2 - C| + D_2 = 0\,. \tag{20}$$

Man kann (20) unter Ausnützung von (4) und mit etwas anderer Bedeutung der Konstanten D_2 auch folgende Gestalt geben:

$$w' + \frac{1}{4}\frac{\gamma\, h}{B}\, r^2 + \left(\frac{1}{4}\gamma\, h\frac{a^2}{B} + \frac{D_1}{2\,B}\right)\ln\left|\frac{r^2}{a^2} - 1\right| + D_2 = 0\,. \tag{20a}$$

In den folgenden Beispielen wird die Grundgleichung (20) mehrfach ausgenutzt und die Berechnung der Integrationskonstanten D_1 und D_2 durch die verschiedenen Bedingungen an den Rändern der Kreisringmembran gezeigt werden.

b) Ermittlung der antimetrischen Auslenkung w''. Der Druckanteil $p'' = \gamma\, r\cos\varphi$ in (16) ergibt in (14a) gemeinsam mit (1a, b) eingeführt zunächst, wenn man jetzt w'' statt w schreibt,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{\partial w''}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\left(B + \frac{C}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2} + \gamma\, r^2\cos\varphi = 0\,. \tag{21}$$

Da in (21) nur die zweite Ableitung von w'' nach φ auftritt, so kann man diese Gleichung durch den Ansatz

$$w'' = R(r)\cos\varphi \tag{22}$$

befriedigen, in dem $R(r)$ nur eine Funktion von r allein ist. Man erhält dann nach Weglassung des Faktors $\cos\varphi$ für R die totale Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}\left[\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{dR}{dr}\right] - \left(B\,r + \frac{C}{r}\right)\frac{R}{r^2} + \gamma\, r^2 = 0\,. \tag{23}$$

Nach Ausführung der Differentiation erhält man aus (23)

$$\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{d^2R}{dr^2} + \left(B + \frac{C}{r^2}\right)\left(\frac{dR}{dr} - \frac{R}{r}\right) + \gamma\, r^2 = 0\,. \tag{23a}$$

Das allgemeine Integral von (23a) setzt sich aus dem der homogenen Gleichung

$$\left(B\,r - \frac{C}{r}\right)\frac{d^2R}{dr^2} + \left(B + \frac{C}{r^2}\right)\left(\frac{dR}{dr} - \frac{R}{r}\right) = 0 \tag{24}$$

und aus einem partikulären Integral zusammen, das aus dem ersteren durch Variation der Konstanten erhalten werden kann. Man erkennt, daß

$$R = E_1\, r \tag{25}$$

mit E_1 als Konstanten die Gleichung (24) befriedigt, somit ein partikuläres Integral derselben darstellt. Mit dem weiteren Ansatz [1]

$$R = E_1\, r\, z\,, \quad \frac{dR}{dr} = E_1\, z + E_1\, r\frac{dz}{dr}\,, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = 2\,E_1\frac{dz}{dr} + E_1\, r\frac{d^2z}{dr^2}\,, \quad \frac{R}{r} = E_1\, z \tag{26}$$

[1] Man vgl. hierzu etwa *R. Rothe*, Höhere Mathematik Teil III, 4. Aufl., S. 189 f.

erhält man aus (24), wenn man die Integrationskonstante E_1 sogleich wegläßt,

$$\left(B\,r-\frac{C}{r}\right)\left(2\,\frac{dz}{dr}+r\,\frac{d^2z}{dr^2}\right)+\left(B+\frac{C}{r^2}\right)r\,\frac{dz}{dr}=0\,. \tag{27}$$

Mit

$$p(r)=\frac{dz}{dr} \tag{28}$$

erhält man aus (27) nach einigen Umformungen und Trennung der Veränderlichen p und r die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{p}+3\,\frac{dr}{r}+\frac{2\,C}{B\,r^2-C}\,\frac{dr}{r}=0\,, \tag{29}$$

deren Integration mittels Partialbruchzerlegung sofort das Ergebnis

$$p\,r\,(r^2-a^2)=E_2 \tag{30}$$

mit E_2 als neuer Integrationskonstante liefert. Wegen der nach (28) nochmals notwendigen Integration von (30), die leicht mittels Partialbruchzerlegung durchgeführt werden kann, erhält man

$$z=\frac{E_2}{a^2}\ln\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}+E_1\,, \tag{31}$$

wobei die abermals auftretende Integrationskonstante in (31) sofort mit E_1 bezeichnet werden konnte, da (31) im Zusammenhalte mit (26) zu

$$R_h=\frac{E_2}{a^2}\,r\ln\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}+E_1\,r \tag{32}$$

führt, so daß also im zweiten partikulären Integral in (32) wieder (25) gewonnen worden ist. R_h in (32) stellt somit das allgemeine Integral der homogenen Gleichung (24) dar. Für die inhomogene Gleichung (23a) kann man mit (4) schreiben[1]

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{1+\frac{a^2}{r^2}}{1-\frac{a^2}{r^2}}\,\frac{dR}{dr}-\frac{1}{r^2}\,\frac{1+\frac{a^2}{r^2}}{1-\frac{a^2}{r^2}}\,R=-\frac{\gamma\,r}{B\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}\,. \tag{33}$$

Faßt man nun die Größen E_1 und E_2 in (32) im Sinne der *Lagrange*schen Methode der Variation der Konstanten als Funktionen von r auf, so erhält man für E_1' und E_2' (Striche bedeuten Ableitung nach r) die inhomogenen Gleichungen

$$E_2'(r)\,\frac{r}{2\,a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+E_1'(r)\cdot r=0\,,$$

$$E_2'(r)\left[\frac{1}{2\,a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}\right]+E_1'(r)=-\frac{\gamma\,r}{B\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}$$

mit der nach (12) für $r>0$ nicht verschwindenden *Wronski*schen oder Systemdeterminante

$$\Delta=-\frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{a^2}{r^2}}=-\frac{r}{r^2-a^2}$$

und den Lösungen

$$E_1'(r)=\frac{\gamma}{2\,a^2\,B}\,r^3\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right),\qquad E_2'(r)=-\frac{\gamma}{B}\,r^3\,. \tag{34a, b}$$

Auch die Gleichungen (34a, b) lassen sich geschlossen integrieren; man erhält nach längeren Rechnungen und unter Weglassung der neu auftretenden Konstanten, die im allgemeinen Integral der inhomogenen Differentialgleichung (33) in den Termen von (32) nach erfolgter Zusammenfassung bereits enthalten sind,

$$E_1(r)=\frac{\gamma}{8\,a^2\,B}\left[r^4\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-a^2\,r^2-a^4\ln\left|\frac{r^2}{a^2}-1\right|\right],\qquad E_2(r)=-\frac{\gamma}{4\,B}\,r^4\,. \tag{35a, b}$$

[1] Um 1 als Faktor der höchsten Ableitung R'' zu erhalten, wurde durch $(B\,r-C/r)$ dividiert. Man vgl. *R. Rothe* a. a. O. S. 188.

Setzt man die Funktionen (35a, b) für E_1 und E_2 in (32) ein, so erhält man das gesuchte partikuläre Integral R_p von (33) nach entsprechender Kürzung zu

$$R_p = -\frac{\gamma}{8\,B}\left[r^3 + a^2\, r \ln\left|1 - \frac{r^2}{a^2}\right|\right]. \tag{36}$$

Durch Zusammenfassung von (32) und (36) erhält man das allgemeine Integral der inhomogenen Differentialgleichung (33) zu

$$R = R_h + R_p = E_1\, r + E_2 \frac{r}{2\,a^2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\gamma}{8\,B}\left(r^3 + a^2\, r \ln\left|1 - \frac{r^2}{a^2}\right|\right). \tag{37}$$

Schließlich erhält man die Auslenkung w'' mit (37) aus (22) zu

$$w'' = \left[E_1\, r + E_2 \frac{r}{2\,a^2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\gamma}{8\,B}\left(r^3 + a^2\, r \ln\left|1 - \frac{r^2}{a^2}\right|\right)\right] \cos\varphi\,. \tag{38}$$

Für homogenen Spannungszustand wird $B = S$ und $a = 0$, wobei der letzte Term in (38) verschwindet, während der Faktor von E_2 übergeht in

$$\lim_{a \to 0}\left[\frac{r}{2\,a^2} \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\right] = \lim_{a \to 0} r\, \frac{r^2}{r^2 - a^2}\, \frac{-2\,a}{r^2} : 4\,a = \lim_{a \to 0} \frac{-r}{2\,(r^2 - a^2)} = \frac{-1}{2\,r}. \tag{39}$$

Somit erhält man aus (38)

$$w'' = \left(E_1\, r - \frac{E_2}{2\,r} - \frac{\gamma}{8\,B}\, r^3\right) \cos\varphi\,.$$

Hiermit ist aber mit etwas anderer Bezeichnung der Konstanten die Gleichung I (12) wieder gewonnen worden.

4. Die Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte. Für den achsensymmetrischen Fall: gilt (20a). Zur Bestimmung der Integrationskonstanten D_1 und D_2 dienen die Randbedingungen (I, Abb. 3)

$$w'\,(r = r_i) = 0\,, \qquad w'\,(r = r_a) = 0\,. \tag{40a, b}$$

Gleichung (20a) liefert mit (40a, b) die Lösungen

$$D_1 = -\frac{1}{2}\gamma\, h\left(a^2 + \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln\dfrac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}}\right), \qquad D_2 = +\frac{1}{4}\frac{\gamma\, h}{B}\, \frac{r_a^2 \ln\left|\dfrac{r^2}{a^2} - 1\right| - r_i^2 \ln\left|\dfrac{r_a^2}{a^2} - 1\right|}{\ln\dfrac{r^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}}\,. \tag{41a, b}$$

Mit (41a, b) erhält man aus (20a) für die achsensymmetrische Auslenkung w'

$$w' = \frac{1}{4}\frac{\gamma\, h}{B}\, \frac{-r^2 \ln\sqrt{\dfrac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}} + r_a^2 \ln\sqrt{\dfrac{r^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}} + r_i^2 \ln\sqrt{\dfrac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2}}}{\ln\sqrt{\dfrac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}}}\,. \tag{42}$$

Dies erfüllt sowohl (18) als auch die Randbedingungen (40a, b). Die Wurzeln könnten natürlich auch weggelassen werden.

Für homogenen Spannungszustand erhält man aus (42) mit $B = S$ und $a = 0$

$$w' = \frac{1}{4}\frac{\gamma\, h}{S}\, \frac{-r^2 \ln\dfrac{r_a}{r_i} + r^2 \ln\dfrac{r}{r_i} + r_i^2 \ln\dfrac{r_a}{r}}{\ln\dfrac{r_a}{r_i}}$$

somit wieder I, (27).

Für das Volumen des kreisringförmigen Wölbungshügels erhält man

$$V = 2 \int_{r_i}^{r_a} \int_{0}^{\pi} w'\, r\, dr\, d\varphi = 2\,\pi \int_{r_i}^{r_a} w'\, r\, dr\,, \tag{43}$$

worin w' aus (42) einzuführen ist. Mittels der Formeln

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C\,, \qquad \int x^{-3} \ln x\, dx = -\frac{\ln x}{2\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2} + C \tag{44a, b}$$

erhält[1] man nach Einführung der Substitutionen

$$\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}=x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}=x^2 \tag{45a, b}$$

die folgenden bestimmten Integrale als Teilergebnisse von (43):

$$\left.\begin{aligned} r_a^2\int_{r_i}^{r_a}\ln\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}}\,r\,dr&=\frac{r_a^2}{2}\left[(r_a^2-a^2)\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}-\frac{1}{2}(r_a^2-r_i^2)\right],\\ r_i^2\int_{r_i}^{r_a}\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}}\,r\,dr&=\frac{r_i^2}{2}\left[-(r_i^2-a^2)\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}+\frac{1}{2}(r_a^2-r_i^2)\right].\end{aligned}\right\} \tag{46a, b}$$

Mit (46a, b) erhält man aus (43) nach einigen Umformungen

$$V=\frac{1}{4}\frac{\gamma h}{B}\frac{\pi(r_a^2-r_i^2)}{\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}}\left[\left(\frac{r_a^2+r_i^2}{2}-a^2\right)\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}-\frac{1}{2}(r_a^2-r_i^2)\right], \tag{47}$$

$$w_{mittel}=\frac{V}{r_a^2\pi}=\frac{\gamma h}{4B}\frac{r_a^2-r_i^2}{r_a^2}\frac{1}{\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}}\left[\left(\frac{r_a^2+r_i^2}{2}-a^2\right)\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}-\frac{r_a^2-r_i^2}{2}\right]. \tag{47a}$$

Aus Gründen des Vergleichs mit anderen Fällen ist dabei w_{mittel} wie in I auf die Außenkreisfläche bezogen.

Für homogenen Spannungszustand folgt aus (47) mit $B=S$ und $a=0$

$$V=\frac{1}{8}\frac{\gamma h\pi}{S}\frac{r_a^2-r_i^2}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left[(r_a^2+r_i^2)\ln\frac{r_a}{r_i}-(r_a^2-r_i^2)\right],$$

somit wieder das Ergebnis I (40).

Für den antimetrischen Auslenkungsanteil w'' hat man (38) wieder den Randbedingungen (40a, b) mit w'' statt w' zu unterwerfen und erhält nach längeren Rechnungen für die beiden Integrationskonstanten E_1 und E_2 mit der abkürzenden Bezeichnung

$$N=\ln\frac{1-\frac{a^2}{r_a^2}}{1-\frac{a^2}{r_i^2}}=\ln\frac{r_i^2(r_a^2-a^2)}{r_a^2(r_i^2-a^2)}=\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}-2\ln\mu \tag{48}$$

die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{\gamma}{8BN}\left\{a^2\left[\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\ln\left|1-\frac{r_i^2}{a^2}\right|-\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\ln\left|1-\frac{r_a^2}{a^2}\right|\right|\right.\\ &\qquad\left.-r_a^2\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)+r_i^2\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\right\},\\ E_2&=\frac{\gamma a^2}{4BN}\left[r_a^2-r_i^2+a^2\ln\left|\frac{1-\frac{r_a^2}{a^2}}{1-\frac{r_i^2}{a^2}}\right|\right]=\frac{\gamma a^2}{4BN}\left[r_a^2-r_i^2+a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{49a, b}$$

Mit (49a, b) erhält man aus (38) nach längeren Rechnungen

$$\begin{aligned} w''=\frac{\gamma}{8BN}&\left\{-\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}+(r^2-r_i^2)\right]+\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r^2-a^2}{r_a^2-a^2}-(r_a^2-r^2)\right]\right.\\ &\left.+\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}+(r_a^2-r_i^2)\right]\right\}r\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Dies erfüllt sowohl die Differentialgleichung (21), als auch die beiden Randbedingungen (40a, b), wie man sich durch Ausrechnung überzeugen kann.

[1] Es ist

$$\int\ln\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}}\,r\,dr=\frac{1}{2}(r^2-a^2)\ln\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}}-\frac{1}{4}(r^2-a^2)+C,$$

$$\int\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}}\,r\,dr=\frac{1}{2}(r^2-a^2)\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}}+\frac{1}{4}(r^2-a^2)+C.$$

Liegt homogener Spannungszustand vor, so ist $B = S$ und $a = 0$. Hierbei verschwinden in (50) sofort alle Terme mit a^2, während die übrigen mit N in (48) unbestimmte Formen ergeben. Man erhält durch Grenzübergang ähnlich wie in (39)

$$\lim_{a\to 0} w'' = \lim_{a\to 0} \frac{\gamma r\cos\varphi}{8S} \frac{-(r^2-r_i^2)\frac{-2a}{r_a^2-a^2} - (r_a^2-r^2)\frac{-2a}{r_i^2-a^2} + (r_a^2-r_i^2)\frac{-2a}{r^2-a^2}}{\frac{(r_i^2-a^2)(-2a)+(r_a^2-a^2)\cdot 2a}{(r_a^2-a^2)(r_i^2-a^2)}}$$

$$= \frac{\gamma r\cos\varphi}{8S} \frac{\frac{r^2-r_i^2}{r_a^2} + \frac{r_a^2-r^2}{r_i^2} - \frac{r_a^2-r_i^2}{r^2}}{-\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_i^2}} = \frac{\gamma r\cos\varphi}{8S}\left(r_a^2 + r_i^2 - r^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2}\right).$$

Damit aber ist Gleichung (32) der Arbeit (I) wiedergewonnen.

Schließlich erhält man durch Addition der Gleichungen (42) und (50) mit N in (48)

$$w = w' + w'' = \frac{1}{4}\frac{\gamma h}{B} \frac{-r^2\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}} + r_a^2\ln\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2}} - r_i^2\ln\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r_a^2-a^2}}}{\ln\sqrt{\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}}}$$

$$+ \frac{1}{8}\frac{\gamma}{BN}\left\{-\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r^2-a^2}{r_i^2-a^2} + (r^2-r_i^2)\right] + \ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r^2-a^2}{r_a^2-a^2} - (r_a^2-r^2)\right]\right.$$

$$\left. + \ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2} + (r_a^2-r_i^2)\right]\right\} r\cos\varphi\,. \tag{51}$$

Erteilt man w den konstanten Wert w_c, so stellt (51) die Gleichung der Höhenschichtenlinien bei inhomogenem Ausgangsspannungszustand in Polarkoordinaten dar. Ein Zahlenbeispiel hierzu ist in Ziff. 7 berechnet.

5. Die Kreisringmembran bei freier Innenkreisplatte. Es gelten für den achsensymmetrischen Fall wieder die Gleichungen (19a) und (20a). Die beiden Integrationskonstanten D_1 und D_2 ergeben sich hier aus dem Gleichgewicht der Innenkreisplatte gegen Verschieben und aus der Forderung des Verschwindens der Auslenkung w längs des Außenrandes $r = r_a$ (man vgl. I Abb. 6a)

$$S_i\left(-\frac{dw'}{dr}\right)_i \cdot 2\,r_i\pi = \gamma h\, r_i^2\pi\,, \qquad w'\,(r = r_a) = 0 \tag{52a, b}$$

(52a) liefert mit (19a) $D_1 = 0$ und damit ergibt dann (52b) mit (20a) sofort D_2:

$$D_1 = 0\,, \qquad D_2 = -\frac{1}{4}\frac{\gamma h}{B}\left(r_a^2 + a^2\ln\left|\frac{r_a^2}{a^2} - 1\right|\right). \tag{53a, b}$$

Hiermit liefert (20a) schließlich wegen (13b) die Lösung

$$w' = \frac{1}{4}\frac{\gamma h}{B}\left[(r_a^2-r^2) + a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}\right]. \tag{54}$$

Für homogenen Spannungszustand folgt aus (54) mit $B = S$ und $a = 0$ sofort wieder I (44a). Die Verschiebung s der Innenkreisplatte folgt aus (54) mit $r = r_i$ zu

$$s = \frac{1}{4}\frac{\gamma h}{B}\left[(r_a^2-r_i^2) + a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}\right], \tag{55}$$

die für homogenen Spannungszustand sofort wieder in I (46) übergeht.

Für das Volumen V des Wölbhügels erhält man mit (43) und der Formel

$$\int x^{-2}\ln x\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \tag{56}$$

nach Hinzufügung des Zylindervolumens $r_i^2\pi s$ unter der ausgelenkten Innenkreisplatte, wobei s aus (55) zu entnehmen ist, nach längeren Rechnungen[1]

$$V = \frac{1}{4}\frac{\gamma h\pi}{B}\left[\frac{r_a^4-r_i^4}{2} + a^2(r_a^2-r_i^2) + a^4\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}\right]. \tag{57}$$

[1] Es kann auch die zweite Formel der Fußnote 1 von S. 164 hier ausgenutzt werden.

Für homogenen Spannungszustand folgt aus (57) mit $B = S$ und $a = 0$ sofort wieder das Ergebnis I (47). Teilt man schließlich (57) durch $r_a^2 \pi$, so erhält man für die mittlere Auslenkung

$$w_{mittel} = \frac{\gamma h}{4 B r_a^2}\left[\frac{r_a^4 - r_i^4}{2} + a^2 (r_a^2 - r_i^2) + a^4 \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right]. \tag{58}$$

Der antimetrische Auslenkungsanteil w'' wird wieder durch (38) beschrieben. Bedeutet nun δ den Winkel, welchen die Ebene der Innenkreisplatte nach erfolgter Auslenkung mit ihrer ursprünglichen Lage einschließt, so bestimmen sich die beiden Integrationskonstanten E_1 und E_2, sowie δ aus den Forderungen des Gleichgewichts der Innenkreisplatte gegen Verdrehen, und der Anpassung von w'' für $r = r_i$ an die Kontur der um den Winkel δ verdrehten Platte und für $r = r_a$ an die Bedingung analog (52b), nämlich $w'' = 0$ (I Abb. 6b):

$$M_{om\,p''} - M_{om} s''_{r_i} - M_{om} s'_{r_i y} = 0\,, \qquad w''(r_i) = \delta r_i \cos\varphi\,, \qquad w''(r_a) = 0\,. \tag{59a, b, c}$$

In (59) bedeutet $M_{om\,p''}$ das Moment der Drücke $p'' = \gamma r \cos\varphi$ bzgl. der x-Achse und kann direkt aus I entnommen werden [Gl. (50a)]:

$$M_{om\,p''} = \frac{1}{4}\gamma r_i^4 \pi\,. \tag{60a}$$

S''_{r_i} bedeutet die Komponente von S_r am Rande der Innenkreisplatte, also von S_i senkrecht zur (x,y)-Ebene, also senkrecht zur Ebene der Innenplatte in ihrer ursprünglichen Lage. Nun folgt aber aus (38)

$$\frac{\partial w''}{\partial r} = \left\{E_1 + E_2 \frac{1}{2 a^2}\left[\ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{2 a^2}{r^2 - a^2}\right] - \frac{\gamma}{8 B}\left(3 r^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r^2}{a^2}\right| - \frac{2 a^2 r^2}{a^2 - r^2}\right)\right\} \cos\varphi\,. \tag{38a}$$

Mit (38a) erhält man schließlich als Moment der erwähnten Komponente S''_{r_i}, die den Hebelsarm $r_i \cos\varphi$ besitzt

$$M_{om} s''_{r_i} = 4 \int_0^{\pi/2} S_i \left(-\frac{\partial w''}{\partial r}\right)_{r_i} r_i \, d\varphi \; r_i \cos\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \left(B - \frac{C}{r_i^2}\right)\left(-\frac{\partial w''}{\partial r}\right)_{r_i} d\varphi \; r_i^2 \cos\varphi$$

$$= r_i^2 \pi \left(B - \frac{C}{r_i^2}\right)\left\{-E_1 - \frac{E_2}{2 a^2}\left[\ln\left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right) + \frac{2 a^2}{r_i^2 - a^2}\right] + \frac{\gamma}{8 B}\left(3 r_i^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r_i^2}{a^2}\right| + \frac{2 a^2 r_i^2}{r_i^2 - a^2}\right)\right\}. \tag{60b}$$

Die zur (x, y)-Ebene parallele noch verbliebene Komponente S'_{r_i} wird nun ihrerseits gemäß I Abb. 7 wieder in zwei Komponenten $S'_{r_i x}$ und $S_{r_i y}$ zerlegt, von denen nur die letztere ein Moment bzgl. der (unverschobenen) x-Achse besitzt. Da der Hebelarm von $S'_{r_i y} = S_i \cos\varphi$ gleich ist $r_i \cos\varphi\,\delta$, so erhält man

$$M_{om} s'_{r_i y} = 4\left(B - \frac{C}{r_i^2}\right)\delta \cdot r_i \int_0^{\pi/2} r_i \cos^2\varphi \, d\varphi = \pi\left(B - \frac{C}{r_i^2}\right) r_i^2 \delta = \pi B (r_i^2 - a^2)\delta\,. \tag{60c}$$

In (60c) hat in der zuerst vorgeschriebenen Gestalt der Klammerausdruck die Bedeutung S_i Führt man nun (60a, b, c) in (59a) ein, so erhält man nach Kürzung durch $r_i^2 \pi$ und Teilung durch B

$$\frac{1}{4}\frac{\gamma r_i^2}{B} - \left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right)\left\{-E_1 - \frac{E_2}{2 a^2}\left[\ln\left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right) + \frac{2 a^2}{r_i^2 - a^2}\right] + \frac{\gamma}{8 B}\left[3 r_i^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r_i^2}{a^2}\right| + \frac{2 a^2 r_i^2}{r_i^2 - a^2}\right]\right\} - \left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right)\delta = 0\,. \tag{61a}$$

Die Bedingung (59b) ergibt mit (38) nach Kürzung durch $r_i \cos\varphi$

$$E_1 + \frac{E_2}{2 a^2}\ln\left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right) - \frac{\gamma}{8 B}\left(r_i^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r_i^2}{a^2}\right|\right) = \delta\,. \tag{61b}$$

Schließlich ergibt die Bedingung (59c) mit (38) nach Kürzung durch $r_a \cos\varphi$

$$E_1 + \frac{E_2}{2 a^2}\ln\left(1 - \frac{a^2}{r_a^2}\right) - \frac{\gamma}{8 B}\left(r_a^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r_a^2}{a^2}\right|\right) = 0\,. \tag{61c}$$

Die Auflösung der Gleichungen (61a), (61b), (61c) ergibt

$$E_1 = \frac{\gamma}{8 B}\left(r_a^2 + a^2 \ln\left|1 - \frac{r_a^2}{a^2}\right|\right), \qquad E_2 = 0\,, \qquad \delta = \frac{\gamma}{8 B}\left[(r_a^2 - r_i^2) + a^2 \ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right]. \tag{62a, b, c}$$

Mit (62a, b) erhält man schließlich aus (38)

$$w'' = \frac{\gamma}{8 B}\left[(r_a^2 - r^2) + a^2 \ln\frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2}\right] r \cos\varphi\,. \tag{63}$$

Mit $a = 0$ und $B = S$ erhält man für homogenen Spannungszustand aus (62a,b,c) mit anderer Konstantenbezeichnung sofort wieder die Gleichungen I (53a,b,c), während (63) wieder in I (13) übergeht.

Schließlich erhält man aus (54) und (63) die Gesamtauslenkung der Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte durch Superposition zu

$$w = w' + w'' = \frac{\gamma}{8\,B}\left[(r_a^2 - r^2) + a^2 \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2}\right](2\,h + r\cos\varphi)\,. \tag{64}$$

Für homogenen Spannungszustand ($B = S$, $a = 0$) geht (64) sofort über in die für denselben geltende Gleichung in I (14).

Ein Zahlenbeispiel für diesen Fall vollkommen freier Innenkreisplatte ist in Ziff. 7 berechnet.

6. Die Kreisringmembran mit elastisch gelagerter Innenkreisplatte. Auch im Falle eines inhomogenen, achsensymmetrischen Ausgangsspannungszustandes soll, um möglichst allgemein zu bleiben, elastische Lagerung mit der Konstanten c_s gegen eine Plattenverschiebung in Richtung w' und eine solche mit der Konstanten c_d gegen Verdrehung um die horizontale x-Achse angenommen werden. Erstere beeinflußt die achsensymmetrische Auslenkung w' unter dem Drucke $p' = \gamma h$, letztere die antimetrische Auslenkung w'' unter dem Drucke $p'' = \gamma r \cos\varphi$ (man vgl. I, Abb. 9).

Beim achsensymmetrischen Belastungsfall gelten für w' bzw. dw'/dr wieder die Gleichungen (20a) bzw. (19a). Bezeichnet man die Plattenverschiebung wieder mit s und bedenkt, daß das Gleichgewicht der Innenkreisplatte gegen Verschieben, sowie die Randwerte von w' am Innen- und Außenrand die Erfüllung der Bedingungen

$$S_i\left(\frac{dw'}{dr}\right)_i 2\,r_i\,\pi + \gamma\,h\,r_i^2\,\pi - c_s\,s = 0\,, \qquad w'(r = r_i) = s\,, \qquad w'(r = r_a) = 0 \tag{65a,b,c}$$

erfordern, so erhält man mit (19a) und (20a) für D_1, D_2 und s die folgenden Gleichungen:

aus (65a): $$-2\,\pi\,D_1 - c_s\,s = 0\,, \tag{66a}$$

aus (65b): $$s + \frac{1}{4}\frac{\gamma\,h}{B}\,r_i^2 + \left(\frac{1}{4}\frac{\gamma\,h}{B}\,a^2 + \frac{D_1}{2\,B}\right)\ln\left|\frac{r_i^2}{a^2} - 1\right| + D_2 = 0\,, \tag{66b}$$

aus (65c): $$\frac{1}{4}\frac{\gamma\,h}{B}\,r_a^2 + \left(\frac{1}{4}\frac{\gamma\,h}{B}\,a^2 + \frac{D_1}{2\,B}\right)\ln\left|\frac{r_a^2}{a^2} - 1\right| + D_2 = 0\,. \tag{66c}$$

Führt man nun die abkürzende Bezeichnung

$$N_1 = \frac{c_s}{2}\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} + 2\,\pi\,B \tag{67}$$

ein, so ergibt die Auflösung von (66a,b,c) nach kurzer Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= -\frac{\gamma\,h}{4\,N_1}\,c_s\left(r_a^2 - r_i^2 + a^2\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right), \\ D_2 &= -\frac{\gamma\,h}{4\,B}\left\{r_a^2 + \left[a^2 - \frac{c_s}{2\,N_1}\left(r_a^2 - r_i^2 + a^2\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right)\right]\ln\left|\frac{r_a^2}{a^2} - 1\right|\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{68a, b}$$

$$s = \frac{\gamma\,h\,\pi}{2\,N_1}\left[r_a^2 - r_i^2 + a^2\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right]. \tag{68c}$$

Für $c_s = \infty$ folgt aus (68c) wegen $N_1 = \infty$ sofort $s = 0$, wie es dem Fall mit fester Innenkreisplatte entspricht. Für $c_s = 0$ hingegen ergibt sich sofort (55), wie es dem Fall mit freier Innenkreisplatte zukommt.

Mit (68a,b,c) erhält man schließlich aus (20a) [man vgl. hierzu die spätere Gleichung (76)]:

$$w' = \frac{\gamma\,h}{8\,B\,N_1}\left\{\left(c_s\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} + 4\,\pi\,B\right)(r_a^2 - r^2) - \left[c_s\,(r_a^2 - r_i^2) - a^2\,4\,\pi\,B\right]\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2}\right\}, \tag{69}$$

$$\frac{dw'}{dr} = \frac{\gamma\,h}{4\,B\,N_1}\,r\left\{-\left[c_s\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} + 4\,\pi\,B\right] + \left[c_s\,(r_a^2 - r_i^2) - a^2\,4\,\pi\,B\right]\frac{1}{r^2 - a^2}\right\}. \tag{69a}$$

Die Ausdrücke (69) mit (69a) erfüllen sowohl die Differentialgleichung (18), als auch die Randbedingungen (65a,b,c). Insbesondere folgt aus (69) mit N_1 in (67) für $c_s = \infty$, wobei also bloß die Glieder mit c_s beibehalten werden,

$$w' = \frac{\gamma\,h}{8\,B}\,\frac{1}{\frac{1}{2}\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}}\left[\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\,(r_a^2 - r^2) - (r_a^2 - r_i^2)\ln\frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2}\right].$$

Nach kurzer Umformung erhält man hieraus aber wieder Gl. (42), wie es dem durch $c_s = \infty$ gekennzeichneten Sonderfall mit fester Innenkreisplatte entspricht. Setzt man hingegen in (69) mit (67) $c_s = 0$, so folgt sofort wieder (54), wie es dem durch $c_s = 0$ charakterisierten Sonderfall mit freier Innenkreisplatte zukommt. Läßt man andererseits a gegen Null gehen und ersetzt B durch S, so folgt zunächst aus (67)

$$N_1 = c_s \ln \frac{r_a}{r_i} + 2\pi S$$

also N in I (57), während aus (69) folgt

$$w' = \frac{\gamma h}{8 S N}\left[\left(2 c_s \ln \frac{r_a}{r_i} + 4\pi S\right)(r_a^2 - r^2) - c_s (r_a^2 - r_i^2) \cdot 2 \ln \frac{r_a}{r}\right]$$

oder

$$w' = \frac{\gamma h}{4 S N}\left[(r_a^2 - r^2)\, 2\pi S + \left(-r^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_i} + r_i^2 \ln \frac{r_a}{r}\right) c_s\right].$$

Dies ist aber Gleichung I (60), wie es dem durch $a = 0$, $B = S$ gekennzeichneten Fall mit homogenem Spannungszustand zukommt.

Um für den Fall mit elastisch gelagerter Innenkreisplatte auch das Volumen des Wölbhügels zu erhalten, hat man (69) wieder der in (43) angegebenen Integration zu unterwerfen, wobei man (44a) ausnützen kann, und zu dem Ergebnis das Zylindervolumen unter der Innenkreisplatte, nämlich $r_i^2 \pi s$ hinzuzufügen, wobei s durch (68c) bestimmt ist. Nach längeren Rechnungen findet man

$$V = \frac{\gamma h \pi}{4 B N_1}\left\{\left[\frac{1}{4}(r_a^2 - r_i^2)(r_a^2 + r_i^2 - 2a^2) \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} - \frac{1}{2}(r_a^2 - r_i^2)^2\right] c_s + \left[(r_a^2 - r_i^2)(r_a^2 + r_i^2 + 2a^2) + 2a^4 \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right] B\pi\right\}. \qquad (70)$$

Für den Sonderfall mit fester Innenkreisplatte erhält man aus (70) und (67) mit $c_s = \infty$ unter Beibehaltung nur der Glieder mit c_s

$$V = \frac{\gamma h \pi (r_a^2 - r_i^2)}{4 B \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}}\left[\left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{4} - \frac{1}{2} a^2\right) \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} - \frac{1}{2}(r_a^2 - r_i^2)\right].$$

Dieses Ergebnis stimmt aber völlig mit (47) überein, wie es dem nunmehr gekennzeichneten Falle mit fester Innenkreisplatte entspricht. Setzt man andererseits $c_s = 0$, so erhält man aus (67) zunächst $N_1 = 2\pi B$ und aus (70) nach Kürzung durch $B\pi$

$$V = \frac{\gamma h \pi}{4 B 2}\left[(r_a^4 - r_i^4) + 2a^2 (r_a^2 - r_i^2) + 2a^4 \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right].$$

Dies stimmt aber völlig mit Gleichung (57) überein, die für frei bewegliche Innenkreisplatte gültig ist. Liegt schließlich ein homogener Spannungszustand vor, so erhält man mit $B = S$ und $a = 0$ aus (67) und (70)

$$N_1 = c_s \ln \frac{r_a}{r_i} + 2\pi S = N \qquad \text{in I (57)},$$

$$V = \frac{\gamma h \pi}{4 S N}\left\{\left[\frac{1}{2}(r_a^4 - r_i^4) \ln \frac{r_a}{r_i} - \frac{1}{2}(r_a^2 - r_i^2)^2\right] c_s + (r_a^4 - r_i^4)\pi S\right\}.$$

Dies stimmt nach Vorziehung des Faktors 1/2 aber völlig überein mit der Gleichung I (61), die für homogenen Spannungszustand und elastisch gelagerter Innenkreisplatte gültig ist. Teilt man noch V in (70) durch $r_a^2 \pi$, so erhält man

$$w_{mittel} = \frac{\gamma h}{4 B N_1}\left\{\left[\frac{1}{4}\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2}(r_a^2 + r_i^2 - 2a^2) \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} - \frac{1}{2}\frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2}\right] c_s + \left[\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2}(r_a^2 + r_i^2 + 2a^2) + \frac{2a^4}{r_a^2} \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\right] B\pi\right\}. \qquad (71)$$

Beim antimetrischen Fall mit der Auslenkung w'' infolge der Belastung durch den Druck $p'' = \gamma r \cos\varphi$ hat man die Gleichung (38) mit den Integrationskonstanten E_1 und E_2 wieder den Bedingungen (59b,c) zu unterwerfen, während statt (59a) nunmehr die allgemeinere Bedingung

$$M_{om\,p''} - M_{om\,s''_{r_i}} - M_{om\,s'_{r_i}\,\gamma} - c_d \delta = 0 \qquad (72)$$

infolge der elastischen Lagerung gegen Verdrehen in Geltung ist. Hierbei können die Gleichungen (60a), (60b) und (60c) unmittelbar benützt werden. Führt man diese in (72) ein, so erhält man nach Teilung durch $r_i^2 \pi B$

$$\frac{1}{4}\frac{\gamma r_i^2}{B}-\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\left\{-E_1-\frac{E_2}{2a^2}\left[\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)+\frac{2a^2}{r_i^2-a^2}\right]+\frac{\gamma}{8B}\left[3r_i^2+a^2\ln\left|1-\frac{r_i^2}{a^2}\right|+\frac{2a^2r_i^2}{r_i^2-a^2}\right]\right\}$$
$$-\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\delta-\frac{c_d}{r_i^2\pi B}\delta=0\,. \tag{72a}$$

Die Gleichungen (61b), (61c) können hingegen unmittelbar übernommen werden. Im Verein mit (72a) ergeben sie für E_1, E_2 und δ die Lösungen

$$E_1=\frac{\gamma}{8BM_1}\left\{\left[a^2\left\{\ln\left|1-\frac{r_i^2}{a^2}\right|\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)-\ln\left|1-\frac{r_a^2}{a^2}\right|\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.+r_i^2\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)-r_a^2\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\right]c_d+\left[r_a^2+a^2\ln\left|1-\frac{r_a^2}{a^2}\right|\right]2a^2\pi B\right\}, \tag{73a}$$

$$E_2=\frac{\gamma a^2}{4BM_1}\left(r_a^2-r_i^2+a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}\right)c_d\,, \tag{73b}$$

$$\delta=\frac{\gamma}{8BM_1}\left(r_a^2-r_i^2+a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}\right)2a^2\pi B \tag{73c}$$

mit

$$M_1=\ln\frac{1-\frac{a^2}{r_a^2}}{1-\frac{a^2}{r_i^2}}\,c_d+2a^2\pi B=l_n\frac{r_i^2(r_a^2-a^2)}{r_a^2(r_i^2-a^2)}c_a+2a^2\pi B \tag{74}$$

Führt man (73a,b) in (38) ein, so erhält man schließlich für die Auslenkung

$$w''=\frac{\gamma r\cos\varphi}{8BM_1}\left\{\left[a^2\left\{\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\ln\frac{r_i^2-a^2}{r^2-a^2}+\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2}+\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)\ln\frac{r^2-a^2}{r_a^2-a^2}\right\}\right.\right.$$
$$+(r_a^2-r_i^2)\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-(r_a^2-r^2)\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)-(r^2-r_i^2)\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\Big]c_d$$
$$\left.+\left(r_a^2-r^2+a^2\ln\frac{r_a^2-a^2}{r^2-a^2}\right)2a^2\pi B\right\}. \tag{75}$$

Bei der Berechnung von w'' in (75) wurde von der Beziehung

$$\ln\left|1-\frac{r_a^2}{a^2}\right|-\ln\left|1-\frac{r_i^2}{a^2}\right|=\ln\frac{r_a^2-a^2}{r_i^2-a^2} \tag{76}$$

Gebrauch gemacht, die wegen (12a), nämlich wegen $a^2<r^2$ zulässig ist. Gleichung (75) befriedigt alle Randbedingungen (59b,c) und (72) und natürlich auch die Differentialgleichung (21) bzw. nach Weglassung des Faktors $\cos\varphi$ die Differentialgleichungen (23) oder (23a).

Läßt man c_d gegen Unendlich gehen, so bleibt von M_1 in (74) und ebenso in (75) nur der Term mit c_d, und man erhält sofort wieder die für feste Innenkreisplatte gültige Gleichung (50). Setzt man andererseits in (75) $c_d=0$, so bleibt von M_1 in (74) und ebenso von (75) nur der Term $2a^2\pi B$, so daß man nach Kürzung durch diesen Faktor sofort wieder Gleichung (63) erhält, die für den nunmehr erhaltenen Fall mit freier Innenkreisplatte gültig ist. Setzt man schließlich in (74) und (75) $a=0$ und $B=S$, so erhält man sofort wieder I (68). Teilt man nämlich Zähler und Nenner in (75) durch a^2, so erhält man nach Weglassung der ersten drei mit $\lim a\to 0$ wegen $\ln 1=0$ verschwindenden Terme des Faktors von c_d und ebenso des mit a^2 behafteten Termes im Faktor von $2\pi S$, wenn man überall wieder B durch S ersetzt und (74) beachtet,

$$w''=\frac{\gamma r\cos\varphi}{8S\left[\frac{1}{a^2}\ln\frac{r_i^2(r_a^2-a^2)}{r_a^2(r_i^2-a^2)}c_d+2\pi S\right]}$$
$$\times\left\{\left[\frac{r_a^2-r_i^2}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{r_a^2-r^2}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)-\frac{r^2-r_i^2}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)\right]c_d+(r_a^2-r^2)\cdot 2\pi S\right\}.$$

Beachtet man nun die Grenzübergänge [man vgl. (39)]

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)=-\frac{1}{r^2}\,,\qquad \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r_i^2}\right)=-\frac{1}{r_i^2}\,,\qquad \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r_a^2}\right)=-\frac{1}{r_a^2}$$

und schließlich

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a^2} \ln \frac{r_i^2 (r_a^2 - a^2)}{r_a^2 (r_i^2 - a^2)} = \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 r_i^2},$$

so folgt nach Erweiterung mit $r_a^2 r_i^2$ sofort die Gleichung I (68), da

$$-\frac{r_a^2 - r_i^2}{r^2} + \frac{r_a^2 - r^2}{r_i^2} + \frac{r^2 - r_i^2}{r_a^2} = \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2 r_i^2} \left[-r^2 + (r_a^2 + r_i^2) - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right].$$

ist. Schließlich erhält man durch Addition der Teilauslenkungen w' in (69) mit N_1 in (67) und w'' in (75) mit M_1 in (74) die Gesamtauslenkung $w = w' + w''$ zu

$$\begin{aligned} w = \frac{\gamma}{8B} \Bigg\{ & \frac{h}{N_1} \left[\left(c_s \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} + 4\pi B \right) (r_a^2 - r^2) - \left\{ c_s (r_a^2 - r_i^2) - 4 a^2 \pi B \right\} \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right] \\ & + \frac{r \cos\varphi}{M_1} \Bigg[\Bigg[a^2 \left\{ \ln\left(1 - \frac{a^2}{r_a^2}\right) \ln \frac{r_i^2 - a^2}{r^2 - a^2} + \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} + \ln\left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right) \ln \frac{r^2 - a^2}{r_a^2 - a^2} \right\} \\ & + (r_a^2 - r_i^2) \ln\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - (r_a^2 - r^2) \ln\left(1 - \frac{a^2}{r_i^2}\right) - (r^2 - r_i^2) \ln\left(1 - \frac{a^2}{r_a^2}\right) \Bigg] c_d \\ & + \left(r_a^2 - r^2 + a^2 \ln \frac{r_a^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right) \cdot 2 a^2 \pi B \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{77}$$

Erteilt man w in (77) den konstanten Wert w_c, so stellt (77) für bestimmte Werte des Halbmesserverhältnisses $\mu = r_a/r_i$ und der Rückführungskonstanten c_s und c_d, sowie des Inhomogenitätsfaktors a des Spannungszustandes die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran in Polarkoordinaten dar, deren punktweise Berechnung nach Wahl der Mittelpunktsentfernung r und dem daraus bestimmten Wert von $\cos\varphi$ leicht erfolgen kann. Man gewinnt so durch (77) eine fünfparametrige Kurvenschar, von welcher natürlich bloß die Zweige innerhalb der Fläche der Kreisringmembran physikalische Bedeutung besitzen.

Ebensolche Kurvenscharen gewinnt man aus (77) auch für konstante radiale und konstante azimutale Neigungen des Wölbhügels durch Bildung der Ableitungen $(\partial w/\partial r)_c$ und $(\partial w/r\,\partial\varphi)_c$, denen man nachträglich konstante Werte erteilt, worauf der Zeiger c in denselben hinweist. Bei den Kurven w_c = konstant sind w_c, $\mu = r_a/r_i$, $\nu = h/r_a$, c_s und c_d die Parameter, während bei den Kurven konstanter Neigung statt w_c jeweils eine der oben angegebenen konstanten Neigungen als Parameter in Erscheinung tritt.

7. Zahlenbeispiele. Wie im homogenen Falle empfiehlt es sich auch hier, durchweg dimensionslose Größen einzuführen. Um die Auswölbungen, die zu verschiedenen inhomogenen Spannungszuständen gehören, miteinander in Vergleich setzen zu können, wurde bei allen diesen Spannungszuständen die gleiche Spannung $S_a = S$ am Außenrande der Membran vorausgesetzt. Im Falle eines homogenen Spannungszustandes wird, wie dies ja schon oft benutzt wurde, auch die Größe B in (1a,b) gleich S, während $a = C = 0$ ist. Neben den bereits in I eingeführten dimensionslosen Größen

$$\varrho = \frac{r}{r_a}, \quad \mu = \frac{r_a}{r_i}, \quad \frac{r}{r_i} = \varrho\,\mu, \quad r_i = \frac{r_a}{\mu}, \quad \frac{h}{r_a} = \nu, \quad \frac{w_c S}{\gamma r_a^3} = \frac{\alpha}{8}, \quad \text{somit} \quad w_c = \frac{\alpha}{8} \frac{\gamma r_a^3}{S} \tag{78a—g}$$

ist hier noch eine Größe λ einzuführen, die neben a in (4) die Inhomogenität des Spannungszustandes charakterisiert und die am besten durch das Verhältnis der Radialspannungen am Innen- und am Außenrande beschrieben werden kann, wobei das beigefügte Intervall für λ aus (9b) oder (7b) mit $r = r_i$ folgt

$$\lambda = \frac{S_i}{S_a} = \frac{S_i}{S}, \qquad \lambda_{min} = 0 \leqq \lambda \leqq \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1} = \lambda_{max}. \tag{79a, b}$$

Im homogenen Fall ist $\lambda = 1$. Die Gleichheitszeichen in (79b) beziehen sich auf die in Ziff. 1 erwähnten Grenzfälle, bei denen einmal $S_i = 0$ ist ($\lambda = 0$), das andere mal $S_{\varphi_i} = 0$ ist [bei $\lambda = 2\mu^2/(\mu^2+1)$] [man vgl. (5b)].

Für die oftmals gebrauchte, die Inhomogenität des Spannungszustandes ebenfalls charakterisierende Konstante a in (4) möge die dimensionslose Größe

$$\beta^2 = \frac{a^2}{r_a^2} = \frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda}, \qquad \left(+\frac{1}{\mu^2}\right)_{\lambda_{min}} \geqq \beta^2 \geqq \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)_{\lambda_{max}} \tag{80a,b}$$

mit $\beta = 0$ im homogenen Falle eingeführt werden, wobei das Intervall (80b) durch (79b) bedingt wird und die beiden Gleichheitszeichen sich wieder auf die erwähnten Grenzfälle beziehen. Schließ-

lich findet man aus (3a)

$$\frac{S}{B} = \varkappa = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \lambda}, \qquad \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2}\right)_{\lambda_{min}} \leqq \varkappa \leqq \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2}\right)_{\lambda_{max}}. \tag{81a, b}$$

Im homogenen Fall ist $B = S$ und also $\varkappa = 1$. Zwischen β^2 in (80a) und $\varkappa$ in (81a) besteht der Zusammenhang

$$1 - \beta^2 = \varkappa, \tag{82}$$

der späterhin ausgenutzt wird. Ferner ergeben sich die folgenden, später benötigten Beziehungen [man vgl. (80a)]

$$\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} = \frac{1 - \dfrac{1-\lambda}{\mu^2-\lambda}}{\dfrac{1}{\mu^2} - \dfrac{1-\lambda}{\mu^2-\lambda}} = \frac{\mu^2}{\lambda}, \tag{83}$$

$$\frac{r^2 - a^2}{r_i^2 - a^2} = \frac{\mu^2}{\lambda}\frac{\varrho^2(\mu^2-\lambda) - (1-\lambda)}{\mu^2 - 1} = \frac{\mu^2}{\lambda}\frac{\varrho^2 - \beta^2}{\varkappa}, \tag{84}$$

$$\frac{r^2 - a^2}{r_a^2 - a^2} = \frac{\varrho^2(\mu^2-\lambda) - (1-\lambda)}{\mu^2 - 1} = \frac{\varrho^2 - \beta^2}{\varkappa}. \tag{85}$$

Für den Spannungsverlauf des Ausgangsspannungszustandes findet man nach (7a, b) mittels (78) bis (81) in dimensionsloser Darstellung

$$\frac{S_r}{S} = \frac{1}{\varkappa}\left(1 - \frac{\beta^2}{\varrho^2}\right), \qquad \frac{S_\varphi}{S} = \frac{1}{\varkappa}\left(1 + \frac{\beta^2}{\varrho^2}\right),$$

hieraus folgt

$$\frac{S_r + S_\varphi}{S} = \frac{2}{\varkappa} = 2\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 - 1} = \text{konst.},$$

also unabhängig von ϱ.

Der Verlauf dieser Spannungen als Funktionen von ϱ ist in Abb. 2 für die angegebenen λ-Werte dargestellt. Mit zunehmendem λ nimmt $S_r + S_\varphi$ ab und erreicht seinen Kleinstwert für $\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6\,S$ (für $\mu = 2$) und den Größenwert $2{,}67\,S$ für $\lambda = \lambda_{min} = 0$. Allgemein gilt

$$2\frac{\mu^2}{\mu^2+1} \leqq \frac{S_r + S_\varphi}{S} \leqq 2\frac{\mu^2}{\mu^2 - 1}.$$

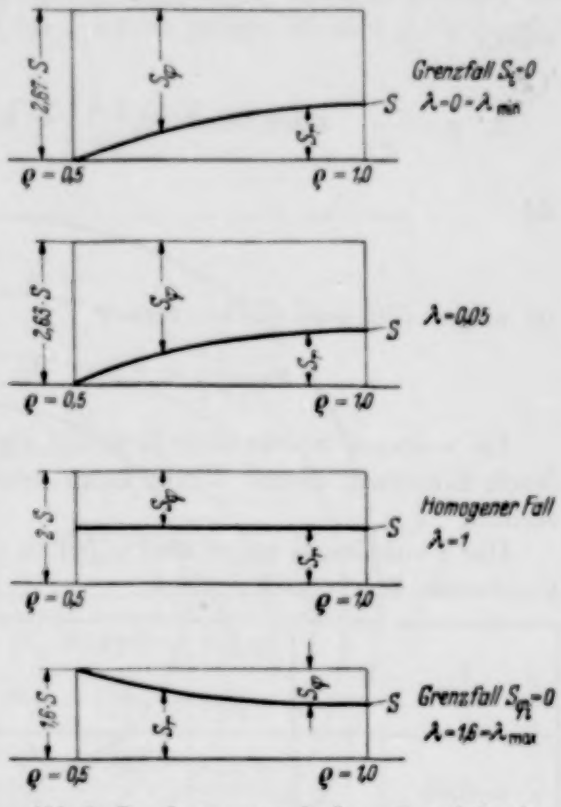

Abb. 2. Der Spannungsverlauf von S_r und S_φ als Funktionen von ϱ für die angegebenen Werte von λ.

a) **Feste Innenkreisplatte.** Die Einführung der dimensionslosen Größen (78) bis (85) in die für diesen Fall gültige Gleichung (51) mit w_e statt w ergibt

$$\left.\begin{aligned} &\cos\varphi = \frac{\dfrac{\alpha}{\varkappa} - \nu\,\psi_1(\varrho)}{\psi_2(\varrho)}, \\ \text{worin}\quad &\psi_1(\varrho) = 2(1-\varrho^2) + 2\,\frac{1 - \dfrac{1}{\mu^2}}{\ln\dfrac{\mu^2}{\lambda}}\ln\frac{\varrho^2 - \beta^2}{\varkappa}, \\ \text{und}\quad &\psi_2(\varrho) = \varrho\left(\frac{2\beta^2\ln\mu + 1 - \dfrac{1}{\mu^2}}{\ln\lambda} - \ln\frac{\varrho^2\varkappa}{\varrho^2 - \beta^2} - 2\beta^2\ln\varrho + 1 - \varrho^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{86a, b, c}$$

[1] Da nach (8) und (83)

$$N = \ln\left(\frac{r_a^2 - a^2}{r_i^2 - a^2}\cdot\frac{r_i^2}{r_a^2}\right) = \ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\frac{1}{\mu^2}\right) = -\ln\lambda$$

ist, so erhält man aus (51) wegen (84) und (85)

$$\psi_2(\varrho) = \frac{\varrho}{\ln\lambda}\left\{\beta^2\left[\ln\left(\frac{\varrho^2-\beta^2}{\varkappa}\frac{\mu^2}{\lambda}\right)\ln\varkappa - \ln\frac{\varrho^2-\beta^2}{\varkappa}\ln(1-\beta^2\mu^2) - \ln\frac{\varrho^2-\beta^2}{\varrho^2}\ln\frac{\mu^2}{\lambda}\right] + \left(\varrho^2 - \frac{1}{\mu^2}\right)\ln\varkappa\right.$$
$$\left. + (1-\varrho^2)\ln(1-\beta^2\mu^2) - \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\ln\frac{\varrho^2-\beta^2}{\varrho^2}\right\} = \frac{\varrho}{\ln\lambda}\left\{2\beta^2\left[\ln\mu\ln\left(\frac{\varrho^2\varkappa}{\varrho^2-\beta^2}\right) - \ln\lambda\ln\varrho\right]\right.$$
$$\left. + (1-\varrho^2)\ln\lambda + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\ln\left(\frac{\varrho^2\varkappa}{\varrho^2-\beta^2}\right)\right\},$$

wenn man beachtet, daß wegen (80a) und (81a) $\varkappa : (1 - \beta^2\mu^2) = 1 : \lambda$ ist.

Die Gleichungen (86a—c) erfüllen, wie man sich zur Kontrolle überzeugen kann, die Bedingung $\alpha = 0$ für den Außenrand $\varrho = 1$ und den Innenrand $\varrho = 1/\mu$ für jedes nach (79b) zulässige λ. Dazu ist notwendig und hinreichend für reelle q, daß für die obigen Werte von ϱ $\psi_1(\varrho) = \psi_2(\varrho) = 0$ ist.

1. $\varrho = 1$. Daß hier $\psi_1(1) = 0$ ist, erkennt man daraus, daß nach (82)

$$\frac{\varrho^2 - \beta^2}{\varkappa} = \frac{1 - \beta^2}{\varkappa} = 1$$

ist. Entsprechend folgt $\psi_2(1) = 0$, da

$$\frac{\varrho^2 \varkappa}{\varrho^2 - \beta^2} = 1$$

wird.

2. $\varrho = \frac{1}{\mu}$. Hier wird $\psi_1\left(\frac{1}{\mu}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) + 2\,\frac{1 - \frac{1}{\mu^2}}{\ln \frac{\mu^2}{\lambda}} \ln \frac{\frac{1}{\mu^2} - \beta^2}{\varkappa} = 0$,

da

$$\left(\frac{1}{\mu^2} - \beta^2\right) : \varkappa = \frac{\lambda}{\mu^2}$$

ist wegen (80) und (81a); ferner

$$\psi_2\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0, \qquad \text{da} \qquad \frac{\varrho^2 \varkappa}{\varrho^2 - \beta^2} = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{ist für} \qquad \varrho = \frac{1}{\mu}.$$

Im weiteren wurde $\mu = 2$, $\nu = 1$ die Spiegelgerade somit als obere Membrantangente gewählt. Nach Einsetzen dieser Werte kann man die Hilfsfunktionen $\psi_1(\varrho)$ und $\psi_2(\varrho)$ in (86) wie folgt darstellen.

Die Funktionen $\psi_1(\varrho)$ und $\psi_2(\varrho)$ in (86b,c) für $\mu = 2$, $\nu = 1$ und die in der ersten Spalte angegebenen Werte von λ sind:

$\lambda = \lambda_{min} = 0$	$\psi_1(\varrho) = 2\,(1 - \varrho^2)$	
	$\psi_2(\varrho) = \varrho[(1 - \varrho^2) - 0{,}5 \ln \varrho]$	
$\lambda = 0{,}05$	$\psi_1(\varrho) = 2(1 - \varrho^2) + 0{,}3423 \ln \{1{,}3167\,(\varrho^2 - 0{,}2405)\}$	
	$\psi_2(\varrho) = \varrho\,[(1 - \varrho^2) - 1{,}2044 \ln \varrho + 0{,}3617 \ln \{1{,}3167\,(\varrho^2 - 0{,}2405)\}]$	
$\lambda = 1$	$\psi_1(\varrho) = 2\,(1 - \varrho^2) + 2{,}1640 \ln \varrho \equiv -Z$ in I (43b)	(87)
	$\psi_2(\varrho) = -\varrho^3 + \frac{5}{4}\,\varrho - \frac{1}{4\,\varrho} \equiv -N$ in I (43c)	Man vgl. die folgenden Ausführungen
$\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$	$\psi_1(\varrho) = 2\,(1 - \varrho^2) + 1{,}637 \ln \{0{,}8\,(\varrho^2 + 0{,}25)\}$	
	$\psi_2(\varrho) = \varrho\,[(1 - \varrho^2) + 2{,}2200 \ln \varrho - 0{,}8600 \ln \{0{,}8\,(\varrho^2 + 0{,}25)\}]$	

Drückt man in $\psi_2(\varrho)$ (86c) $\varkappa$ und β^2 mittels (81a) und (80a) durch λ aus, so folgt

$$\psi_2(\varrho) = \varrho\left[\left(2\,\frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \ln \mu + 1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\ln \frac{\varrho^2 (\mu^2 - 1)}{\varrho^2 \mu^2 - 1 + \lambda (1 - \varrho^2)}}{\ln \lambda} - 2\,\frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \ln \varrho + 1 - \varrho^2\right].$$

Läßt man hierin λ gegen 1 gehen, wie es dem homogenen Fall entspricht, so verschwindet in der runden Klammer der Term mit $\ln \mu$ und ebenso der mit $\ln \varrho$, während der Bruch einen unbestimmten Wert annimmt; seine Berechnung ergibt

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{\ln \frac{\varrho^2 (\mu^2 - 1)}{\varrho^2 \mu^2 - 1 + \lambda (1 - \varrho^2)}}{\ln \lambda} = -\frac{1 - \varrho^2}{\varrho^2 (\mu^2 - 1)}.$$

Es verbleibt

$$\psi_2(\varrho)_{\lambda = 1} = \varrho\left[-\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{1 - \varrho^2}{\varrho^2 (\mu^2 - 1)} + 1 - \varrho^2\right] = \varrho\,(1 - \varrho^2)\left(1 - \frac{1}{\mu^2\,\varrho^2}\right).$$

Mit $\mu = 2$ folgt

$$\psi_2(\varrho)_{\lambda = 1} = -\varrho^3 + \frac{5}{4}\,\varrho - \frac{1}{4\,\varrho}, \qquad \text{also} \qquad -N \text{ in I (43c)}.$$

Für $\psi_1(\varrho)_{\lambda = 1}$ ist dieser Grenzübergang noch viel leichter durchführbar.

In Tab. 1 sind nun die Funktionen ψ_1 und ψ_2 in (87) für die in der ersten Zeile angegebenen Werte von ϱ und die obigen Werte von λ jeweils in den ersten beiden Zeilen berechnet, während die nächsten Zeilen für die in der zweiten Spalte jeweils angegebenen α-Werte die nach (86a) berechneten Werte von $\cos\varphi$ enthalten, die dann zur Konstruktion der Abb. 3 bis 5 dienten. Darunter, durch einen Strich getrennt, befinden sich drei Zeilen, welche die für $\cos\varphi = -1{,}0;\ +1$ nach (86) ermittelten α-Werte enthalten, die zur Darstellung der Meridiankurven in den Schnittebenen durch die ξ- bzw. η-Achse in den Abb. 3 und 4 benötigt werden.

Der in Abb. 3 dargestellte Fall $\lambda = 0$, bei dem also am Innenrand $S_r = 0$ ist, stellt einen Extremfall auch insofern dar, als er zwar den vorgeschriebenen Randbedingungen (40a, b) genügt, wie oben gezeigt wurde, andererseits aber nach (86a) und (87) für $\lambda = 0$ zu jedem Winkel φ für $\varrho = 0{,}5$ einen endlichen Wert ergibt. Man erhält

$$\alpha = \varkappa\,[\nu\,\psi_1(0{,}5) + \psi_2(0{,}5)\cos\varphi] = 0{,}75\,[1{,}5 + 0{,}5483\cos\varphi]\,.$$

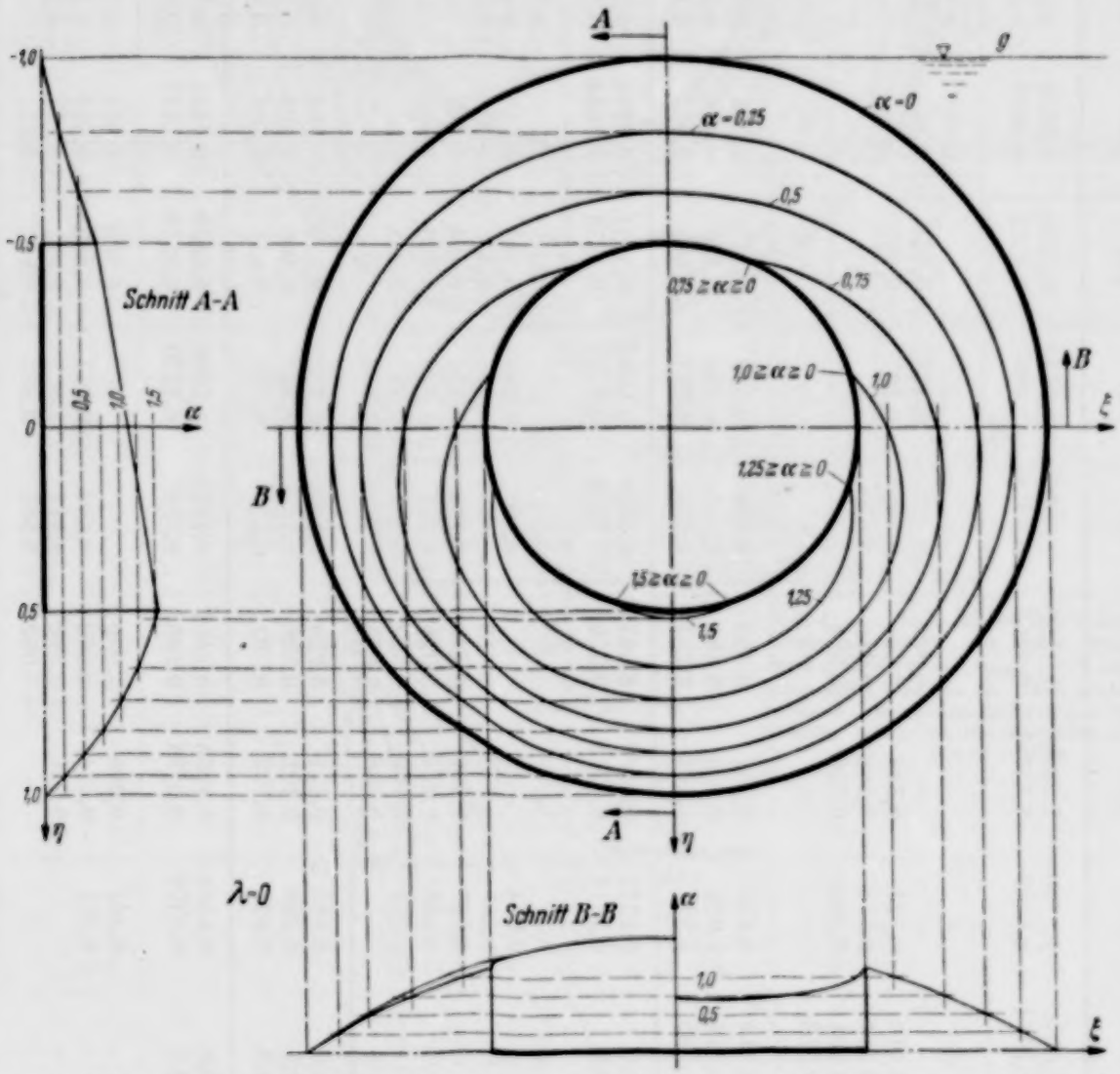

Abb. 3. Die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte für $\lambda = 0$ und für die durch die angegebenen α-Werte bestimmten Höhenlagen der Schnittebenen, sowie die Meridianschnitte durch die ξ- und η-Achse.

Z. B. erhält man so nach Tab. 1 für $\lambda = 0$ und $\cos\varphi = 1$ $\alpha = 1{,}536$. Dieser Fall mit sehr kleinem λ läßt sich verwirklichen (Abb. 5), wenn sich z. B. die Membran an einen Zylinder vom Halbmesser r_i anlegen kann. Sie schmiegt sich demselben und ebenso der Meridiankurve $\lambda = 0$ um so inniger an, je kleiner λ ist. Das ganze Verhalten ähnelt dem in I, Abb. 4 dargestellten, bei dem allerdings nicht die Inhomogenität des Spannungszustandes, sondern r_i verändert wurde. Würde in Abb. 5 auch noch r_i variiert werden, so würde bei jeweils gleichem λ die Anschmiegung an den Innenzylinder und die Meridiankurve um so inniger werden, je kleiner r_i ist.

In Abb. 5, in der auch der vertikale Meridianschnitt der Vollkreismembran für den homogenen Fall $\lambda = 1$ (strichliert gezeichnet) aus I übernommen worden ist, erkennt man den großen Einfluß der Inhomogenität des Spannungszustandes sehr deutlich. Bei kleinem λ, also kleiner Innenrandspannung, wölbt sich die Membran wesentlich höher auf (in Abb. 4 und 5 für $\lambda = 0{,}05$ wölbt sie sich bis über $\alpha = 0{,}7$ auf), als im Falle größerer λ (in Abb. 4 und 5 für $\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$ nur bis nicht

Tabelle 1. *Die zu den ganz oben angegebenen Werten von ϱ jeweils nach (86 b, c) für die links vermerkten Werte von λ berechneten Funktionen $\psi_1(\varrho)$ und $\psi_2(\varrho)$, sowie die nach (86a) zu den gewählten x-Werten berechneten Werte von $\cos\varphi$ bzw. zu den gewählten Werten von $\cos\varphi$ berechneten Werte von x. Die Tabelle diente zur Konstruktion der Abb. 3 bis 5*

	ϱ	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0	
	$\psi_1(\varrho)$	1,5000	1,3950	1,2800	1,1550	1,0200	0,8750	0,7200	0,5550	0,3800	0,1950	0,0	
	$\psi_2(\varrho)$	0,5483	0,5480	0,5372	0,5153	0,4818	0,4360	0,3773	0,3050	0,2184	0,1170	0,0	
$\lambda = 0$ (Abb. 3)	$x = 0{,}25$	—	—	—	—	—	—	—	—0,723	—0,214	—	—	Werte von $\cos\varphi$
	$x = 0{,}50$	—	—	—	—0,948	—0,733	—0,478	—0,141	+0,366	—	—	—	
	$x = 0{,}75$	—0,912	—0,721	—0,521	—0,301	—0,042	+0,287	+0,742	—	—	—	—	
	$x = 1{,}0$	—0,304	—0,113	+0,099	+0,346	+0,650	—	—	—	—	—	—	
	$x = 1{,}25$	+0,304	+0,496	+0,720	+0,992	—	—	—	—	—	—	—	
	$x = 1{,}50$	+0,912	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	$\cos\varphi = -1$	0,714	0,635	0,557	0,480	0,404	0,329	0,257	0,188	0,121	0,058	0,0	
	$\cos\varphi = 0$	1,125	1,046	0,960	0,866	0,765	0,656	0,540	0,416	0,285	0,146	0,0	Werte x
	$\cos\varphi = +1$	1,536	1,457	1,363	1,253	1,126	0,983	0,823	0,645	0,449	0,234	0,0	
	$\psi_1(\varrho)$	0,0	0,5372	0,6463	0,6659	0,6389	0,5814	0,5001	0,3994	0,2815	0,1480	0,0	
	$\psi_2(\varrho)$	0,0	0,2811	0,3513	0,3767	0,3759	0,3553	0,3170	0,2624	0,1915	0,1041	0,0	
$\lambda = 0{,}05$ (Abb. 4)	$x = 0{,}1$	—	—	—	—	—	—	—	—	—0,782	—0,157	—	Werte von $\cos\varphi$
	$x = 0{,}2$	—	—0,974	—	—	—0,999	—0,895	—0,747	—0,519	—0,095	—	—	
	$x = 0{,}3$	—	—0,506	—0,715	—0,719	—0,649	—0,525	—0,332	—0,017	+0,593	—	—	
	$x = 0{,}4$	—	—0,037	—0,340	—0,370	—0,298	—0,154	+0,084	+0,485	—	—	—	
	$x = 0{,}5$	—	+0,431	+0,034	—0,020	+0,052	+0,217	+0,499	+0,987	—	—	—	
	$x = 0{,}6$	—	+0,899	+0,409	+0,329	+0,402	+0,587	+0,915	—	—	—	—	
	$x = 0{,}7$	—	—	+0,784	+0,679	+0,752	+0,958	—	—	—	—	—	
	$\cos\varphi = -1$	0,0	0,195	0,224	0,220	0,200	0,172	0,139	0,104	0,068	0,033	0,0	
	$\cos\varphi = 0$	0,0	0,408	0,491	0,506	0,485	0,442	0,380	0,303	0,214	0,112	0,0	Werte x
	$\cos\varphi = +1$	0,0	0,621	0,758	0,792	0,771	0,771	0,621	0,503	0,359	0,191	0,0	
	$\psi_1(\varrho)$	0,0	0,0584	0,1056	0,1402	0,1617	0,1698	0,1639	0,1441	0,1101	0,0621	0,0	
	$\psi_2(\varrho)$	0,0	0,0399	0,0724	0,1002	0,1184	0,1270	0,1254	0,1127	0,0898	0,0507	0,0	
$\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$ (Abb. 4)	$x = 0{,}05$	—	—0,461	—0,906	—1,000	—	—	—0,988	—0,924	—0,781	—0,436	—	Werte von $\cos\varphi$
	$x = 0{,}1$	—	+0,541	—0,354	—0,600	—0,690	—0,707	—0,669	—0,569	—0,335	+0,353	—	
	$x = 0{,}2$	—	—	+0,751	+0,198	—0,014	—0,077	—0,031	+0,141	+0,556	—	—	
	$x = 0{,}3$	—	—	—	+1,000	+0,661	+0,553	+0,607	+0,851	—	—	—	
	$\cos\varphi = -1$	0,0	0,023	0,042	0,050	0,054	0,054	0,048	0,039	0,025	0,014	0,0	
	$\cos\varphi = 0$	0,0	0,073	0,132	0,175	0,202	0,212	0,205	0,180	0,138	0,078	0,0	Werte x
	$\cos\varphi = +1$	0,0	0,123	0,223	0,300	0,350	0,371	0,362	0,321	02,50	0,141	0,0	

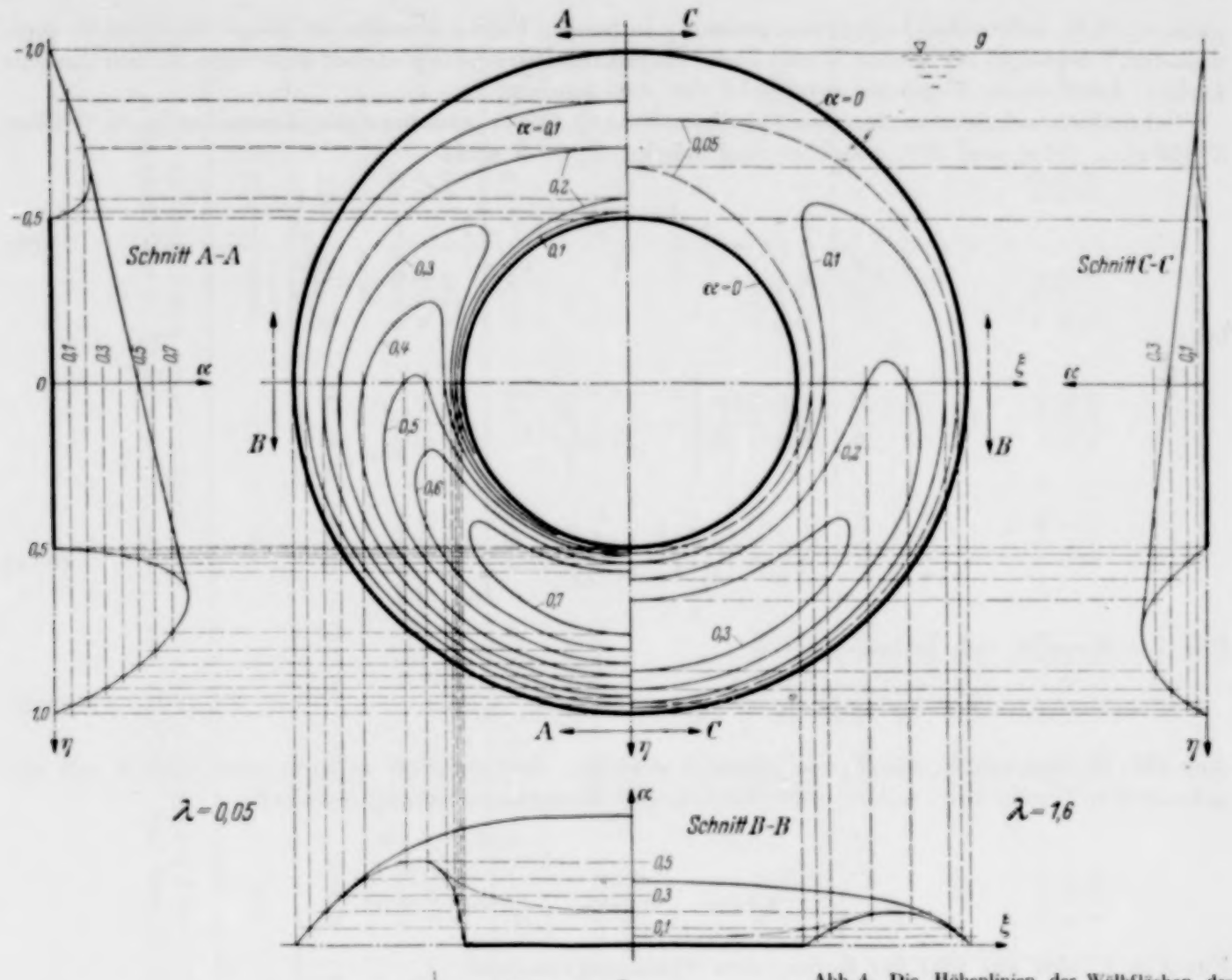

Abb. 4. Die Höhenlinien der Wölbflächen der Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte für $\lambda = 0{,}05$ und $\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$ (je zur Hälfte dargestellt) und für die durch die angegebenen α-Werte bestimmten Höhenlagen der Schnittebenen, sowie die Meridianschnitte durch die ξ- und η-Achse.

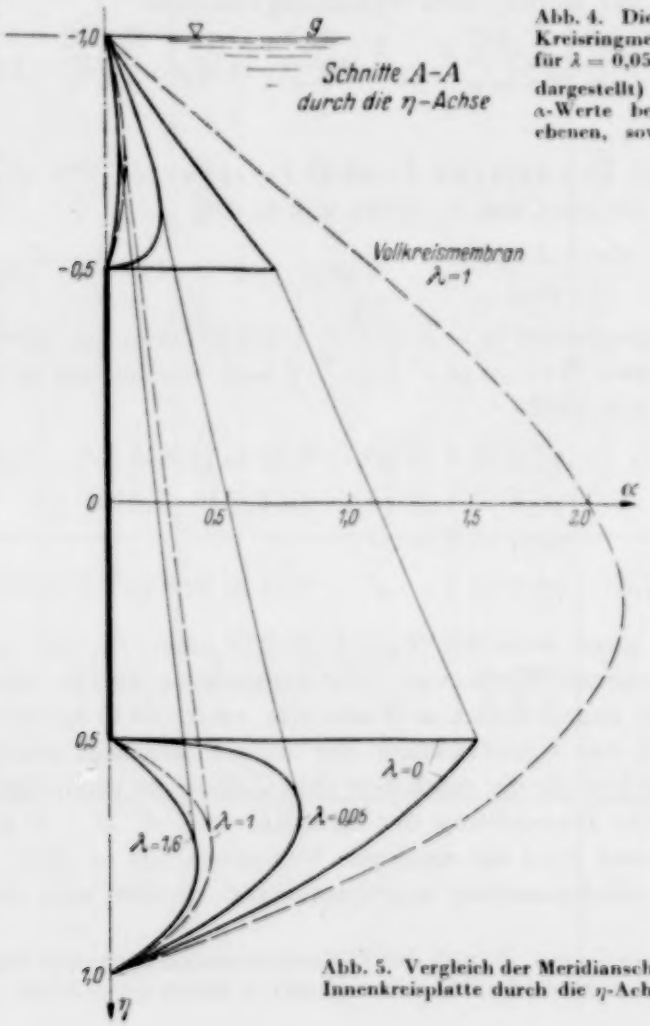

Abb. 5. Vergleich der Meridianschnitte der Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte durch die η-Achse für die angegebenen Werte von λ.

ganz $\varkappa = 0{,}4$), sofern die Außenrandspannung in beiden Fällen dieselbe ist. Zugleich erkennt man, daß der Wölbhügel für kleine Werte λ am Innenkreise wesentlich steiler aufsteigt, als am Außenkreise. Auch dieses Ergebnis entspricht der Anschauung.

Schließlich erhält man für das Volumen V nach (47), wenn man die dimensionslosen Größen β^2 (80a), $\varkappa$ (81a) und (83) beachtet und wieder $S_a = S$ setzt

$$V = \frac{1}{4}\,\frac{\gamma\, v\, \pi\, r_a^5}{S}\,\frac{\mu^2-\lambda}{\mu^2-1}\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)\left[\frac{1+\dfrac{1}{\mu^2}}{2}-\frac{1-\lambda}{\mu^2-\lambda}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\dfrac{1}{\mu^2}}{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\mu^2}{\lambda}\right)}\right] \tag{88}$$

oder

$$V = \frac{\pi}{4}\,\frac{\gamma\, r_a^5}{S}\,v\,\frac{(\mu^2-1)^2}{\mu^2(\mu^2-\lambda)}\left[\frac{\mu^2-1+\dfrac{\lambda}{\mu^2}(\mu^2-1)}{2(\mu^2-\lambda)}-\frac{\mu^2-1}{\mu^2\ln\left(\dfrac{\mu^2}{\lambda}\right)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\,\frac{\gamma\, r_a^5}{S}\,v\,\frac{(\mu^2-1)^3}{\mu^2(\mu^2-\lambda)}\left[\frac{1+\dfrac{\lambda}{\mu^2}}{2(\mu^2-\lambda)}-\frac{1}{\mu^2\ln\left(\dfrac{\mu^2}{\lambda}\right)}\right]. \tag{88a}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich insbesondere

$$V = \frac{\gamma\, r_a^5}{S}\,\frac{\pi\, v}{8}\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2}\right)^3. \tag{88b}$$

Aus (88) ist ersichtlich, wie V von μ und λ abhängt. Insbesondere erkennt man, daß V mit abnehmendem λ zunimmt, wie es auch die folgende Zusammenstellung erweist:

λ	1,6	1	0,05	0
$V:\frac{\gamma\, r_a^5}{S}$	0,0416	0,0495	0,0955	0,166

Für $\lambda = 1$ folgt aus (88) für homogenen Spannungszustand

$$V = \frac{\gamma\,\pi\, r_a^5}{8\,S\ln\mu}\,\frac{\mu^2-1}{\mu^4}\,[(\mu^2+1)\ln\mu-(\mu^2-1)]$$

wie in I. S. 370.

b) Vollkommen frei bewegliche Innenkreisplatte. Mit den dimensionslosen Größen (78) bis (82) und (85) erhält man mit w_e statt w aus (64)

$$\cos\varphi = \frac{\alpha/\varkappa - 2\,v\,\psi(\varrho)}{\varrho\,\psi(\varrho)}, \qquad \psi(\varrho) = 1-\varrho^2-\frac{1-\lambda}{\mu^2-\lambda}\ln\frac{\varrho^2-\beta^2}{\varkappa}. \tag{89a,b}$$

Für homogenen Spannungszustand $\varkappa = \lambda = v = 1$ erhält man aus (89) $\psi(\varrho) = 1-\varrho^2$ und damit sofort wieder I (24). Mit den Werten $\mu = 2$, $v = 1$ und den bereits in (87) angegebenen λ-Werten erhält man insbesondere aus (89b)

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_{min} = 0: && \psi(\varrho) = 1-\varrho^2-0{,}25\ln[1{,}333\,(\varrho^2-0{,}25)],\\
&\lambda = 0{,}05: && \psi(\varrho) = 1-\varrho^2-0{,}2405\ln[1{,}3167\,(\varrho^2-0{,}2405)],\\
&\lambda = 1: && \psi(\varrho) = 1-\varrho^2,\\
&\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6: && \psi(\varrho) = 1-\varrho^2+0{,}25\ln[0{,}8\,(\varrho^2+0{,}25)].
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

In Tab. 2, deren Aufbau ganz dem der Tab. 1 gleicht, sind für die oben angegebenen Werte ϱ und die in (90) hervorgehobenen Werte von λ die Funktion ψ und in den nächsten Zeilen für die in der zweiten Spalte jeweils angegebenen α-Werte die nach (89a) ermittelten Werte von $\cos\varphi$ berechnet worden, die dann zur Konstruktion der Abb. 6 benötigt wurden[1]. Wieder durch einen Strich getrennt, enthalten jeweils die nächsten drei Zeilen die nach (89a) ermittelten α-Werte für $\cos\varphi = -1{,}0, +1$, die der Darstellung der Schnitte $A-A$, $B-B$ und $C-C$ in Abb. 6 und 7 dienten. Aus Abb. 6 erkennt man ein analoges Verhalten wie in Abb. 4: Bei dem kleinen Werte $\lambda = 0{,}05$, also kleiner Radialspannung am Innenrand, wölbt sich die Membran samt der frei

[1] Dies wurde für $\lambda = 0$ unterlassen, da sich der Höhenlinienplan dann nur sehr wenig von dem für $\lambda = 0{,}05$ unterschieden hätte, wie man auch aus den Meridianschnitten durch die η-Achse in Abb. 7 erkennt.

Tabelle 2. *Die zu den ganz oben angegebenen Werten von ϱ jeweils nach (89 b) für die links vermerkten Werte von λ berechnete Funktion $\psi(\varrho)$, sowie die nach (89 a) zu den gewählten x-Werten berechneten Werte von $\cos\varphi$ bzw. zu den gewählten Werten von $\cos\varphi$ berechneten Werte von x. Die Tabelle diente zur Konstruktion der Abb. 6 und 7*

	ϱ	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0	
$\lambda = 0$	$\psi(\varrho)$	∞	1,3623	1,1200	0,9449	0,7949	0,6564	0,5235	0,3930	0,2631	0,1323	0,0	
	$\cos\varphi = -1$	∞	1,481	1,176	0,957	0,775	0,615	0,471	0,339	0,217	0,104	0,0	Werte x
	$\cos\varphi = 0$	∞	2,043	1,680	1,417	1,192	0,985	0,785	0,590	0,395	0,198	0,0	
	$\cos\varphi = +1$	∞	2,605	2,184	1,878	1,610	1,354	1,099	0,840	0,572	0,293	0,0	
$\lambda = 0{,}05$	$\psi(\varrho)$	1,8039	1,3002	1,0852	0,9211	0,7778	0,6438	0,5145	0,3868	0,2592	0,1305	0,0	
	$x = 0{,}5$	—	—	—	—	—	—	−0,902	−0,351	+0,601	—	—	
	$x = 1{,}0$	—	—	—	−0,879	−0,439	+0,060	+0,699	—	—	—	—	
	$x = 1{,}5$	—	−0,875	−0,300	+0,221	+0,772	—	—	—	—	—	—	Werte von $\cos\varphi$
	$x = 2{,}0$	—	+0,046	+0,712	—	—	—	—	—	—	—	—	
	$x = 2{,}5$	−0,350	+0,968	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	$x = 3{,}0$	+0,380	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	$\cos\varphi = -1$	2,055	1,432	1,152	0,945	0,768	0,611	0,468	0,338	0,209	0,104	—	
	$\cos\varphi = 0$	2,740	1,975	1,647	1,399	1,180	0,976	0,780	0,587	0,393	0,198	—	Werte x
	$\cos\varphi = +1$	3,430	2,515	2,142	1,855	1,594	1,344	1,098	0,837	0,570	0,292	—	
$\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$	$\psi(\varrho)$	0,5209	0,4934	0,4606	0,4225	0,3789	0,3298	0,2751	0,2147	0,1488	0,0772	0,0	
	$x = 0{,}5$	—	—	—	—	—	—	−0,684	−0,161	+0,765	—	—	
	$x = 1{,}0$	−0,928	−0,689	−0,439	−0,164	+0,159	+0,569	—	—	—	—	—	Werte $\cos\varphi$
	$x = 1{,}5$	+0,608	+0,786	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
	$\cos\varphi = -1$	0,976	0,895	0,805	0,713	0,616	0,515	0,412	0,309	0,204	0,102	0,0	
	$\cos\varphi = 0$	1,302	1,231	1,151	1,055	0,946	0,824	0,687	0,537	0,372	0,193	0,0	Werte x
	$\cos\varphi = +1$	1,629	1,572	1,497	1,400	1,280	1,134	0,963	0,765	0,540	0,284	0,0	

beweglichen Innenkreisplatte viel höher auf, als im dort ebenfalls dargestellten Fall $\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$. Auch der Anstieg am Innenrand ist dann viel größer als bei größeren λ-Werten, ein Ergebnis, das wieder der Anschauung entspricht. Noch deutlicher wird dies aus den in Abb. 7 in Vergleich gesetzten Meridianschnitten durch die η-Achse, die zu den verschiedenen λ-Werten gehören, wobei der strichliert gezeichnete Schnitt wieder aus I für homogenen Spannungszustand entnommen wurde. Der singuläre Grenzfall $\lambda = 0$ ist hier durch unendliche, praktisch sehr große Steilheit der Meridiankurve am Innenrand und unendliches (praktisch sehr großes) Erheben der Innenkreisplatte gekennzeichnet, er ist also bei frei beweglicher Innenkreisplatte auszuschließen. Für $\mu = 2$ und $\nu = 1$, wird also etwa $\lambda \geqq 0{,}05$ sein müssen, da sonst die Auslenkungen nicht mehr als klein, wie es die Theorie verlangt, angesehen werden können.

Für das Volumen V des Wölbhügels samt Innenkreisplatte erhält man aus (57) mit (80a), (81a) und (83)

$$V = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma r_a^5}{S} \nu \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - \lambda} \left[\frac{\mu^4 - 1}{2\,\mu^4} + \left(\frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \right) \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} + \left(\frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \right]. \tag{91}$$

Hierin ist die Abhängigkeit des Volumens V von den Parametern μ und λ ersichtlich. Für homogenen Spannungszustand folgt aus (91) mit $\lambda = 1$ wieder

$$V = \frac{\pi}{8} \frac{\gamma r_a^5}{S} \nu \frac{\mu^4 - 1}{\mu^4}, \tag{91a}$$

woraus man für $\mu = 2$ und $\nu = 1$ sofort wieder

$$V = \frac{15\,\pi}{128} \frac{\gamma r_a^5}{S}$$

wie in I S. 374 erhält. Aus der folgenden Zusammenstellung erkennt man, daß V mit abnehmendem λ zunimmt:

λ	1,6	1	0,05	0
$V : \frac{\gamma r_a^5}{S}$	0,333	0,368	0,532	∞

Insbesondere folgt im singulären Grenzfall $\lambda = \lambda_{min} = 0$ aus (91) in Übereinstimmung mit Abb. 7 $V = \infty$.

Schließlich findet man aus (55) die Auslenkung s und aus (62c) den Winkel δ, für welche Größen nach Umschreibung in dimensionsloser Form folgt

$$s = \frac{1}{4} \frac{\gamma r_a^3}{S} \varkappa \nu \left[\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} + \frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \right], \tag{92}$$

$$\delta = \frac{1}{8} \frac{\gamma r_a^2}{S} \varkappa \left[\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} + \frac{1 - \lambda}{\mu^2 - \lambda} \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right) \right]. \tag{93}$$

Der Wert ∞ für s und $\not\propto \delta$, wenn λ gegen Null geht, kennzeichnet abermals die Singularität des Grenzfalles $\lambda = 0$ bei freier Innenkreisplatte. Man erhält aus (92) und (93) [1]:

λ	1,6	1	0,05	0
$s : \frac{\gamma r_a^3}{8\,S} = \alpha_s$	1,302	1,500	2,740	∞
$\delta : \frac{\gamma r_a^2}{8\,S} = \frac{\alpha_s}{2}$	0,651	0,750	1,370	∞

Auch der Fall der elastisch gelagerten Innenkreisplatte läßt sich analog behandeln, wenn man neben den in (79) bis (85) eingeführten dimensionslosen Größen und Funktionen noch die beiden dimensionslosen Größen

$$\sigma = \frac{\varkappa c_s}{2\,\pi\,S}, \qquad \tau = \frac{\varkappa c_d}{2\,\pi\,S\,r_a^2} \tag{94a,b}$$

[1] Die Bezeichnung α_s und δ_s in Abb. 6 und 7 soll auf die Abhängigkeit dieser Größen der Zeichnung von den gewählten Maßstäben für α bzw. r_a und r_i hinweisen.

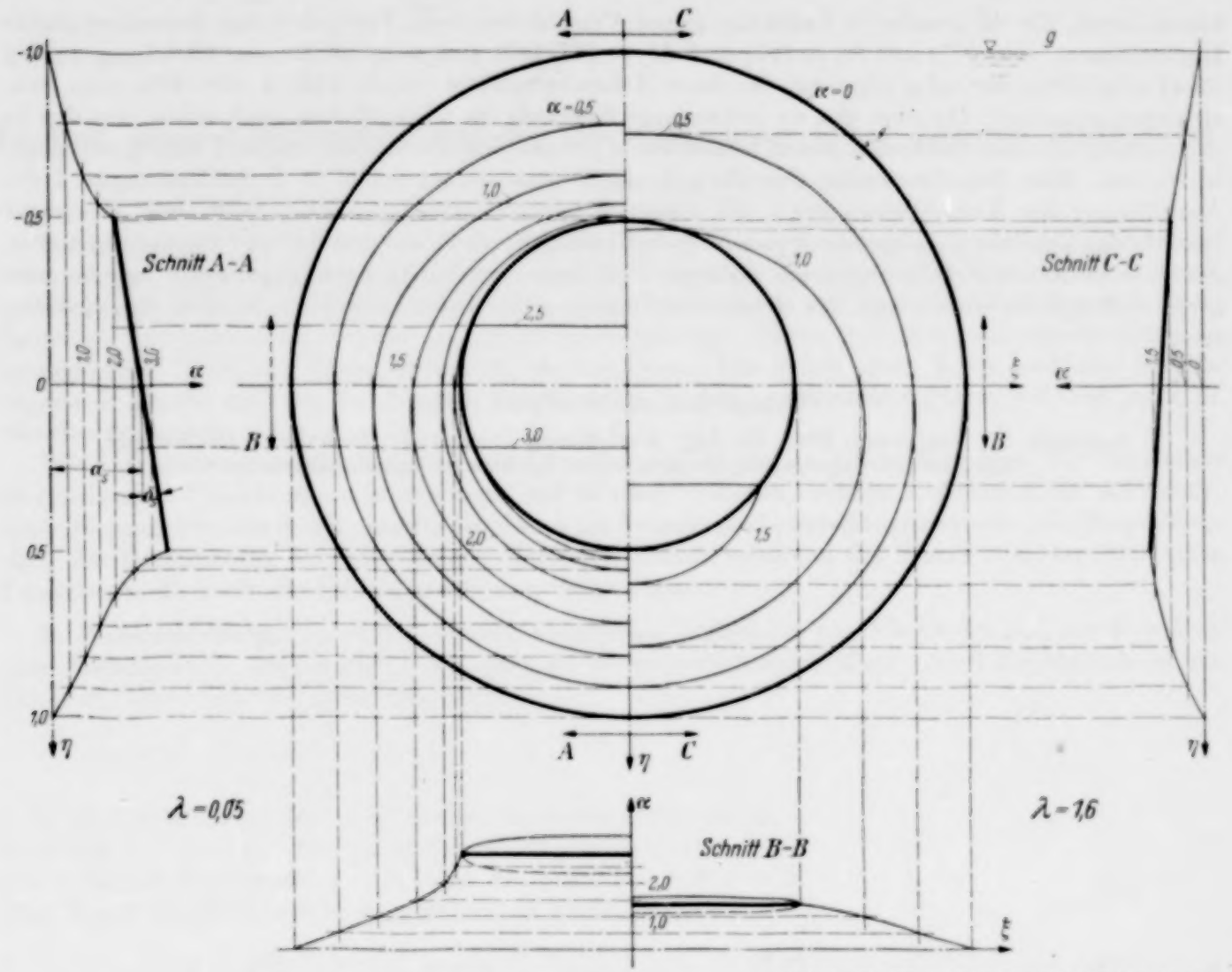

Abb. 6. Die Höhenlinien der Wölbflächen der Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte für $\lambda = 0{,}05$ und $\lambda = \lambda_{max} = 1{,}6$ (je zur Hälfte dargestellt) und für die durch die angegebenen α-Werte bestimmten Höhenlagen der Schnittebenen, sowie die Meridianschnitte durch die ξ- und η-Achse.

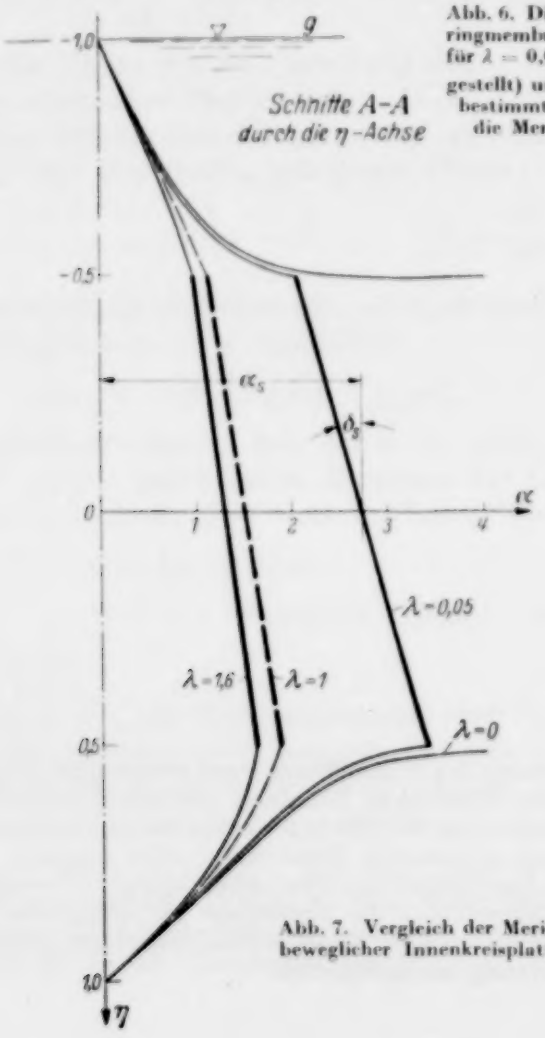

Abb. 7. Vergleich der Meridianschnitte der Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte durch die η-Achse für die angegebenen Werte von λ.

hinzunimmt, die die elastische Lagerung gegen Verschieben bzw. Verdrehen der Innenkreisplatte kennzeichnen. Aus (77) mit N_1 in (67) und M_1 in (74) läßt sich dann leicht eine Gleichung analog (86a) oder (89a) für $\cos\varphi$ angeben, die dann Höhenlinienpläne wie in Abb. 4 oder Abb. 6 zu konstruieren gestattet. Da aber das zu erwartende Ergebnis im wesentlichen auch schon aus den in den vorhergehenden Zahlenbeispielen behandelten Grenzfällen dieses allgemeinen Falles hervorgeht, wurde von einer Durchrechnung desselben Abstand genommen, zumal in I, Zahlenbeispiel 4 die Auswölbung der Kreisringmembran mit elastisch gegen Verschieben und Verdrehen gelagerter Innenkreisplatte bei homogenem Spannungszustand behandelt worden ist und in einer späteren Arbeit über Laminarströmungen ein analoger Fall berechnet wird. Eine Singularität wie im vorhergehenden Falle wird wegen der elastischen Lagerung der Innenkreisplatte nicht in Erscheinung treten[1].

(Eingegangen am 10. August 1957.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *Karl Karas*, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für Angewandte Mechanik und Technische Schwingungslehre

[1] Eine hydromechanische Deutung der Auswölbung einer inhomogen gespannten Kreisringmembran würde nicht nur eine örtlich veränderliche dynamische Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit, sondern überdies noch deren Abhängigkeit von der Orientierung der Flächen voraussetzen, in denen sie wirksam wäre. Hingegen ist eine solche Deutung bei homogen gespannten Membranen stets möglich. Für rechteckige und elliptische Konturen — auch in allgemeiner Lage gegen den Flüssigkeitsspiegel — wurde dies vom Verf. in bereits abgeschlossenen Arbeiten gezeigt. Während sich die Ergebnisse für elliptische Konturen in geschlossener Form angeben ließen, boten sie sich für rechteckige Konturen in Form außerordentlich rasch konvergenter Reihen dar, die eine zahlenmäßige Auswertung leicht zuließen.

Einfluß eines Kreisloches auf die Durchbiegung einer dünnen Halbebene

Von **O. Tamate**

1. Einleitung. Vor kurzem hat *S. Woinowsky-Krieger*[1] eine Reihe von Randwertaufgaben der Plattenbiegung mit Hilfe von Bipolarkoordinaten durchgeführt; es handelt sich dabei naturgemäß um Bereiche, die von zwei Kreisbögen oder einem Kreisbogen und einer Geraden begrenzt sind. Dabei wird erwähnt, daß das zur gleichen Klasse gehörige Gebiet, z. B. der exzentrische Ring, in grundsätzlich ähnlicher Weise behandelt werden kann. Die durch einen Kreis und eine Gerade begrenzte Platte und die durch zwei kreisförmige Löcher geschwächte Platte gehören auch in dieselbe Kategorie.

Wir betrachten nun die Aufgabe, die Spannungserhöhung an einem Kreisloch für die dünne biegebelastete Halbebene zu bestimmen, und behandeln dieses Problem auf Grund der *Kirchhoff*schen Biegungstheorie elastischer Platten[2] und der komplexen Darstellungsmethode von *Muskhelishvili*[3]. Zur Bestimmung der Koeffizienten der den Spannungszustand der Platte charakterisierenden Funktion wollen wir die Störungsrechnung verwenden.

2. Problemstellung. In einer isotropen elastischen Halbebene (x, y) befindet sich ein Kreisloch vom Halbmesser r, dessen Mitte den Abstand d vom geradlinigen Rand $y = 0$ der Halbebene hat (Abb. 1). Durch die komplexe Funktion

$$z \equiv x + i\,y = \omega(\zeta) \equiv i\,a\,\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \quad \text{mit} \quad \zeta = \varrho\,e^{i\vartheta} \tag{2.1}$$

wird der Bereich von der (x, y)-Ebene auf einen konzentrischen Kreisring $1 < \varrho < \varrho_0$ der (ϱ, ϑ)-Ebene abgebildet. Der Wert $\varrho = 1$ liefert die Gerade $y = 0$, also die x-Achse. Soll $\varrho = \varrho_0$ dem Rand des Kreisloches entsprechen, so muß gelten:

$$d = a\,\frac{\varrho_0^2 + 1}{\varrho_0^2 - 1}, \qquad r = a\,\frac{2\,\varrho_0}{\varrho_0^2 - 1}. \tag{2.2}$$

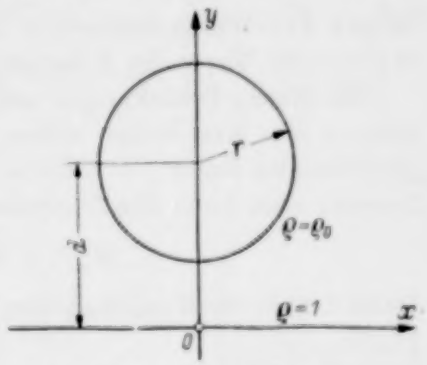

Abb. 1. Die gelochte Halbebene.

Nun nehmen wir an, daß die Platte der Beschränkung der *Kirchhoff*schen Biegungstheorie elastischer Platten folge. Dann erhalten wir die Grundgleichung für die Durchbiegung $w(x, y)$ einer auf ihrer Oberfläche kraftfreien, nur durch Randmomente und Randkräfte gebogenen Platte

$$\Delta\Delta w = 0 \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Bekanntlich kann man die biharmonische Funktion $w(x, y)$ durch zwei analytische Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\chi_1(z)$ der komplexen Variablen $z = x + i\,y$ darstellen:

$$w(x, y) = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\,\varphi_1(z) + \chi_1(z)]\,. \tag{2.3}$$

Hierbei ist Re [. . . . .] der Realteil des Ausdruckes, der in der eckigen Klammer steht; ferner ist $\bar{z} \equiv x - i\,y$. Die Spannungen werden durch die in Richtung der Dickenerstreckung zusammengefaßten Kräfte und Momente dargestellt. Für diese Größen gelten die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &M_x + M_y = -2\,D\,(1 + \nu)\,[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}], \\ &M_x - M_y + 2\,i\,H_{xy} = -2\,D\,(1 - \nu)\,[\bar{z}\,\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad \text{mit} \quad \psi_1(z) = \frac{d\chi_1(z)}{dz}, \\ &N_x - i\,N_y = -4\,D\varphi_1'(z)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

wobei M_x, M_y die Biegemomente, H_{xy} das Torsionsmoment und N_x und N_y die Querkräfte sind. Jede dieser Größen wird auf die Längeneinheit bezogen und die x- und y-Suffixe bedeuten die Wirkung auf dem Querschnitt senkrecht zur x- bzw. zur y-Achse. Unter D und ν ist hierbei die Plattensteifigkeit bzw. die Querkontraktionszahl zu verstehen.

---

[1] *S. Woinowsky-Krieger*, J. Appl. Mech. 22 (1955) S. 129; Ing.-Arch. 24 (1956) S. 47.

[2] *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells, Kap. 4. New York 1940.

[3] *N. I. Muskhelishvili*, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Übersetzung vom Russischen ins Englische von *J. R. M. Radok*, Groningen 1953.

Beim Übergang zu den orthogonalen krummlinigen Koordinaten $\varrho = \text{konst.}$, $\vartheta = \text{konst.}$ mit Hilfe der Funktion $z = \omega(\zeta)$ ergeben die Formeln (2.4) für die Komponenten der Momente bzw. der Kräfte in bezug auf die Achsen ϱ, ϑ

$$\left.\begin{aligned} &M_\varrho + M_\vartheta = -2D(1+\nu)\,[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]\,, \\ &M_\varrho - M_\vartheta + 2i\,H_{\varrho\vartheta} = -2D(1-\nu)\,\frac{\zeta^2}{\varrho^2}\,\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,\Psi'(\zeta)]\,, \\ &N_\varrho - i\,N_\vartheta = -4D\,\frac{\zeta}{\varrho}\,\frac{1}{|\omega'(\zeta)|}\,\Phi'(\zeta)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)\,, \qquad \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta)\,, \\ &\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,, \qquad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

gesetzt ist.

Bekanntlich lauten die Randbedingungen für freien Plattenrand

$$-\frac{1}{\varepsilon}\,\varphi_1(z) + z\,\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = i\,C\,z + C_1\,. \tag{2.7}$$

Dabei ist C eine reelle, C_1 eine komplexe Konstante mit

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{3+\nu}\,. \tag{2.8}$$

Wegen der Willkürlichkeit in der Wahl der Funktionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ kann man auf einem der Ränder die Werte der Konstanten C und C_1 festlegen.

Mit diesen Beziehungen und Bezeichnungen bestimmen wir den Spannungszustand in der Umgebung des Kreisloches unter der Bedingung, daß einerseits auf den Lochrand $\varrho = \varrho_0$ und den geradlinigen Rand $\varrho = 1$ keine äußeren Kräfte wirken, andererseits die Spannungen in großer Entfernung vom Loch den folgenden Werten entsprechen:

$$M_x^{(\infty)} = M_0\,, \qquad M_y^{(\infty)} = H_{xy}^{(\infty)} = N_x^{(\infty)} = N_y^{(\infty)} = 0\,. \tag{2.9}$$

Dann lautet die Funktion der Durchbiegung der Mittelfläche der durch kein Loch geschwächten Platte

$$w_0 = -\frac{M_0}{2D(1-\nu^2)}(x^2 - \nu\,y^2)\,. \tag{2.10}$$

An Hand der Formel (2.7) kann man die Randbedingungen in der Form schreiben

$$\varrho = 1: \quad -\frac{1}{\varepsilon}\,\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma^{-1})}}\,\overline{\varphi}'(\sigma^{-1}) + \overline{\psi}(\sigma^{-1}) = 0\,, \tag{2.11}$$

$$\varrho = \varrho_0: \quad -\frac{1}{\varepsilon}\,\varphi(\varrho_0\sigma) + \frac{\omega(\varrho_0\sigma)}{\overline{\omega'(\varrho_0\sigma^{-1})}}\,\overline{\varphi}'(\varrho_0\sigma^{-1}) + \overline{\psi}\,(\varrho_0\sigma^{-1}) = C_1\,. \tag{2.12}$$

Hierin ist $\sigma = e^{i\vartheta}$.

Die Funktionen $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$, die den Spannungszustand der geschwächten Platte charakterisieren, lassen sich darstellen in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\zeta) = \varphi^{(0)}(\zeta) + \varphi^{(1)}(\zeta)\,, \\ &\psi(\zeta) = \psi^{(0)}(\zeta) + \psi^{(1)}(\zeta)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

so daß die Funktionen $\varphi^{(0)}(\zeta)$ und $\psi^{(0)}(\zeta)$ dem Grundspannungszustand und $\varphi^{(1)}(\zeta)$ und $\psi^{(1)}(\zeta)$ dem ergänzenden Spannungszustand entsprechen. Infolge (2.10) haben die Funktionen $\varphi^{(0)}(\zeta)$ und $\psi^{(0)}(\zeta)$ die Form

$$\varphi^{(0)}(\zeta) = -i\,a\,\frac{M_0}{D}\,\frac{1+\varepsilon}{8(1-\varepsilon)}\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\,, \qquad \psi^{(0)}(\zeta) = -i\,a\,\frac{M_0}{D}\,\frac{1+\varepsilon}{8\varepsilon}\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\,. \tag{2.14}$$

Nun nehmen wir die Zusatzfunktionen in folgender Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{(1)}(\zeta) = i\,a\,\frac{M_0}{D}\,\frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,(a_n\zeta^n + b_n\zeta^{-n})\,, \\ &\psi^{(1)}(\zeta) = i\,a\,\frac{M_0}{D}\,\frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\,(\zeta-\zeta^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\zeta^n - b_n\zeta^{-n}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,(c_n\zeta^n + d_n\zeta^{-n})\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

wobei infolge der Symmetrie des Problems a_n, b_n, c_n und d_n reelle Konstante sind. Es ist leicht zu beweisen, daß die zu $\varphi^{(1)}$ und $\psi^{(1)}$ gehörigen Spannungskomponenten nur dann im Unendlichen verschwinden, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ konvergiert. Also ist es klar, daß die Funktionen $\varphi^{(1)}$ und $\psi^{(1)}$ alsdann auch den eindeutigen und im endlichen Bereich der Platte endlichbleibenden Verschiebungszustand angeben.

3. Koeffizientenbestimmung. Die Koeffizienten a_n, b_n, c_n und d_n, durch welche $\varphi^{(1)}$ und $\psi^{(1)}$ bestimmt sind, ergeben sich aus den Randbedingungen für $\varrho = 1$ und $\varrho = \varrho_0$ und aus der Konvergenz der Reihe.

Führen wir die Funktionen $\varphi^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ (2.14) und $\varphi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$ (2.15) in die Bedingung (2.11) ein und setzen die Koeffizienten verschiedener Potenzen von σ gleich Null, so erhalten wir

$$c_n = -\frac{b_n}{\varepsilon}, \qquad d_n = -\frac{a_n}{\varepsilon}. \tag{3.1}$$

In gleicher Weise ergibt die Bedingung (2.12) mit (3.1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2})\,a_1 + (1-\varrho_0^{-2})\,b_1 = -(1-\varrho_0^{-2}) - \varkappa, \\ &(1-\varrho_0^{-2})\,a_1 + \frac{1}{\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2})\,b_1 = \varkappa\,\varrho_0^{-2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})\,a_n - \frac{1}{(n-1)\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2(n-1)})\,a_{n-1} + (1-\varrho_0^{-2})\,\varrho_0^{-2(n-1)}\,(b_n - b_{n-1}) \\ &\qquad = -(1-\varrho_0^{-2})\,\varrho_0^{-2(n-1)}, \\ &(1-\varrho_0^{-2})\,(a_n - a_{n-1}) + \frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})b_n - \frac{1}{(n-1)\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2(n-1)})\,\varrho_0^{-2}\,b_{n-1} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 2) \tag{3.3}$$

mit

$$\varkappa = C_1/-i\,a\,\frac{M_0}{D}\,\frac{1+\varepsilon}{4\varepsilon}. \tag{3.4}$$

Wegen der Rekursionsform dieser Gleichungen finden wir leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})\,a_n + (1-\varrho_0^{-2})\,\varrho_0^{-2(n-1)}\,b_n = -(1-\varrho_0^{-2n}) - (1-\varrho_0^{-2})^2 \sum_{i=1}^{n-1} b_i\,\varrho_0^{-2(i-1)} - \varkappa, \\ &(1-\varrho_0^{-2})\,a_n + \frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})\,b_n = -(1-\varrho_0^{-2}) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2i})\,b_i + \varkappa\,\varrho_0^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 2) \tag{3.5}$$

Demnach liefert die Konvergenzbedingung der Koeffizienten

$$\varkappa = -1 - (1-\varrho_0^{-2})^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,\varrho_0^{-2(i-1)} = (\varrho_0^2 - 1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2i})\,b_i. \tag{3.6}$$

Dieses Gleichungssystem (3.2), (3.5), (3.6) reicht zur eindeutigen Bestimmung der Koeffizienten aus. Eliminiert man zunächst die Koeffizienten a_n und $\varkappa$ aus den Gleichungen, so kann das folgende Gleichungssystem für Ermittlung der Koeffizienten b_n gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)(1-\varrho_0^{-2})\,b_1 + (1-\varrho_0^{-2})^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\varrho_0^{-2}\right)\sum_{i=1}^{\infty} b_i\,\varrho_0^{-2(i-1)} = -\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\varrho_0^{-2}, \\ &\frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2})\,(1-\varrho_0^{-2n}) \sum_{i=1}^{n-1}\left[(1-\varrho_0^{-2})\,\varrho_0^{-2i} + \frac{1}{i\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2i})\right] b_i \\ &\quad + \left[\frac{1}{n^2\varepsilon^2}(1-\varrho_0^{-2n})^2 + \frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2})^2\,(1-\varrho_0^{-2n})\,\varrho_0^{-2n} - (1-\varrho_0^{-2})^2\,\varrho_0^{-2n}\right] b_n \\ &\quad + (1-\varrho_0^{-2})^2\left[\frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})\,\varrho_0^{-2} + (1-\varrho_0^{-2})\right] \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i\,\varrho_0^{-2(i-1)} \\ &\quad = -(1-\varrho_0^{-2})\,\varrho_0^{-2n} - \frac{1}{n\varepsilon}(1-\varrho_0^{-2n})\,\varrho_0^{-2} \qquad (n \geqq 2). \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Für vorgegebene Werte von ϱ_0 und ε kann dieses Gleichungssystem leicht iterativ gelöst werden.

4. Anwendung der Störungsrechnung. Bekanntlich verändert sich der maximale Wert des Biegemoments in der Platte mit ϱ_0 und ε. Um die Abhängigkeit des maximalen Momentes von ϱ_0 und ε zu finden, ist es indessen bequemer, zur Bestimmung der Koeffizienten die Störungsrechnung

zu verwenden, in der ϱ_0 und ε die Störungsparameter sind. Wenn ϱ_0 als groß angenommen ist, so mögen wird die Ansätze

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \sum_{r=0}^{\infty} a_n^{(r)}\, \varrho_0^{-2(n+r)}, & b_1 &= \sum_{r=0}^{\infty} b_1^{(r)}\, \varrho_0^{-2(r+1)} \\ b_n &= \sum_{r=0}^{\infty} b_n^{(r)}\, \varrho_0^{-2(n+r-1)} \quad (n \geqq 2), & \varkappa &= \sum_{r=0}^{\infty} \varkappa^{(r)}\, \varrho_0^{-2r} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

machen. Setzen wir dies in (3.2), (3.3), (3.6) ein und vergleichen die Koeffizienten der gleichen Potenzen von ϱ_0, so erhalten wir

$$\varkappa^{(0)} = -1, \quad \varkappa^{(1)} = -b_1^{(0)}, \quad \varkappa^{(2)} = -b_1^{(1)} + 2\,b_1^{(0)} - b_2^{(0)}, \quad \varkappa^{(3)} = -b_1^{(2)} + 2\,b_1^{(1)} - b_1^{(0)} - b_2^{(1)} + 2\,b_2^{(0)},$$

$$\varkappa^{(r)} = -b_1^{(r-1)} + 2\,b_1^{(r-2)} - b_1^{(r-3)} - \sum_{i=2}^{t} b_i^{(r-2i+2)} + 2\sum_{i=2}^{t'} b_i^{(r-2i+1)} - \sum_{i=2}^{t''} b_i^{(r-2i)} \quad (r \geqq 4), \tag{4.2}$$

wobei

$$t = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(r+2) \\ \frac{1}{2}(r+1) \end{Bmatrix}, \quad t' = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}(r+1) \end{Bmatrix}, \quad t'' = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}(r-1) \end{Bmatrix}, \quad \text{wenn} \quad r = \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix} \quad \text{ist;}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}a_1^{(0)} = 1, \quad \frac{1}{\varepsilon}a_1^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon}a_1^{(0)} - b_1^{(0)} + b_2^{(0)}, \quad \frac{1}{\varepsilon}a_1^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon}a_1^{(1)} + \frac{1}{2\varepsilon}a_2^{(1)} - b_1^{(1)} + b_1^{(0)} + b_2^{(1)} - b_2^{(0)}, \\ &\frac{1}{\varepsilon}a_1^{(r)} = \frac{1}{\varepsilon}a_1^{(r-1)} + \frac{1}{2\varepsilon}(a_2^{(r-1)} - a_2^{(r-3)}) - b_1^{(r-1)} + b_1^{(r-2)} + b_2^{(r-1)} - b_2^{(r-2)} \quad (r \geqq 3), \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}b_1^{(0)} = -a_1^{(0)} + \varkappa^{(0)}, \quad \frac{1}{\varepsilon}b_1^{(r)} = -a_1^{(r)} + a_1^{(r-1)} + \frac{1}{\varepsilon}b_1^{(r-1)} + \varkappa^{(r)} \quad (r \geqq 1), \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(0)} = 1, \quad a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = \cdots = a_n^{(n-2)} = 0 \quad (n \geqq 3), \\ &\frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(n-1)} = -b_n^{(0)}, \quad \frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(n)} = \frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(0)} - b_n^{(1)} + b_n^{(0)} + b_{n+1}^{(0)}, \\ &\frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(n+1)} = \frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(1)} + \frac{1}{(n+1)\varepsilon}a_{n+1}^{(n)} - b_n^{(2)} + b_n^{(1)} + b_{n+1}^{(1)} - b_{n+1}^{(0)}, \\ &\frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(r)} = \frac{1}{n\varepsilon}a_n^{(r-n)} + \frac{1}{(n+1)\varepsilon}(a_{n+1}^{(r-1)} - a_{n+1}^{(r-n-2)}) - b_n^{(r-n+1)} + b_n^{(r-n)} + b_{n+1}^{(r-n)} - b_{n+1}^{(r-n-1)} \\ &\qquad\qquad (r \geqq n+2), \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 2) \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\varepsilon}b_2^{(0)} = a_1^{(0)}, \quad \frac{1}{2\varepsilon}b_2^{(1)} = a_1^{(1)} - a_1^{(0)} - a_2^{(0)} + \frac{1}{\varepsilon}b_1^{(0)}, \\ &\frac{1}{2\varepsilon}b_2^{(r)} = a_1^{(r)} - a_1^{(r-1)} - a_2^{(r-1)} + a_2^{(r-2)} + \frac{1}{\varepsilon}(b_1^{(r-1)} - b_1^{(r-2)}) + \frac{1}{2\varepsilon}b_2^{(r-2)} \quad (r \geqq 2), \end{aligned}\right\} \tag{4.6a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(0)}, \quad \frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(1)} = a_{n-1}^{(1)} - a_{n-1}^{(0)} - a_n^{(0)} + \frac{1}{(n-1)\varepsilon}b_{n-1}^{(1)}, \\ &\frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(r)} = a_{n-1}^{(r)} - a_{n-1}^{(r-1)} - a_n^{(r-1)} + a_n^{(r-2)} + \frac{1}{(n-1)\varepsilon}b_{n-1}^{(r)} \quad (r = 2 \sim n-2).\ (n \geqq 4), \\ &\frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(n-1)} = a_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1}^{(n-2)} - a_n^{(n-2)} + a_n^{(n-3)} + \frac{1}{(n-1)\varepsilon}(b_{n-1}^{(n-1)} - b_{n-1}^{(0)}), \\ &\frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(r)} = a_{n-1}^{(r)} - a_{n-1}^{(r-1)} - a_n^{(r-1)} + a_n^{(r-2)} + \frac{1}{n\varepsilon}b_n^{(r-n)} + \frac{1}{(n-1)\varepsilon}(b_{n-1}^{(r)} - b_{n-1}^{(r-n+1)}) \quad (r \geqq n). \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 3) \tag{4.6b}$$

Mit diesen Gleichungen kann man die Koeffizienten $a_n^{(r)}$, $b_n^{(r)}$, $\varkappa_n^{(r)}$ der Reihe (4.1) nacheinander bestimmen.

Ferner erkennen wir aus diesen Gleichungen, daß die Koeffizienten $a_n^{(r)}$ und $b_n^{(r)}$ als Polynom von ε, dessen Grad $2r+1$ bzw. $2r+2$ ist, dargestellt werden.

Die vorhergehende Lösung ist nur formal, und um die Gültigkeit der Lösung zu sichern, wäre es nötig, die Konvergenz der Reihe (4.1) zu beweisen. Der direkte Beweis ist ziemlich schwer, aber das Ergebnis der numerischen Rechnungen zeigt, daß die Reihe (4.1) bis zum siebenten Gliede einschließlich eine praktisch befriedigende Konvergenz für $\varrho_0 > 2$ ergibt.

Die Werte der Koeffizienten, die in der Reihe (4.1) enthalten sind, haben wir bis zu $r = 7$ berechnet, aber der Platz erlaubt leider nicht, die Werte hier in Tabellen beizufügen.

5. Entwicklung des maximalen Moments in Reihe nach ρ_0 und ϵ. Für die praktische Anwendung interessieren uns naturgemäß die Biegemomentskomponenten, und hiervon wieder die Größtwerte, die aus Symmetriegründen am Lochrand der engsten Stelle erwartet werden dürfen.

Da am Lochrand $M_\varrho = 0$ ist, so ergeben sich die maximalen Biegemomente

$$\frac{M_{max}}{M_0} = 1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (a_n \varrho_0^{n-1} - b_n \varrho_0^{-(n+1)}) (\varrho_0 + 1)^2 .$$

Nimmt man die Ansätze (4.1) hinzu, so kann das größte Biegemoment in eine Reihe von ϱ_0 und ε entwickelt werden:

$$\frac{M_{max}}{M_0} = 2 - \varepsilon + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{t} m_{r,p} \varepsilon^p \varrho_0^{-r} , \quad (5.1)$$

wobei die Grenze t folgende Werte hat

$$t = \begin{Bmatrix} r+1 \\ r \end{Bmatrix}, \quad \text{wenn} \quad r = \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix} \text{ ist} .$$

Die berechneten Werte von $m_{r,p}$ sind in Tafel 1 angegeben. In Abb. 2 ist M_{max} in Abhängigkeit von ε (oder ν) und r/d aufgetragen.

Im Grenzfall $r/d \to 0$ ($\varrho_0 \to \infty$), d. h. für die unendlich breite Platte mit einem Kreisloch erhält man mit

$$\frac{M_{max}}{M_0} = 2 - \varepsilon = \frac{5 + 3\nu}{3 + \nu} , \quad (5.2)$$

das wohlbekannte Resultat[1].

Es ist leicht zu zeigen, daß in der von beiden Begrenzungen gebildeten Verengung ein Biegemoment $-a \varkappa M_0$ übertragen wird; dies gibt ein durchschnittliches Moment

$$\frac{M_m}{M_0} = -\frac{\varrho_0 + 1}{\varrho_0 - 1} \varkappa \quad (5.3)$$

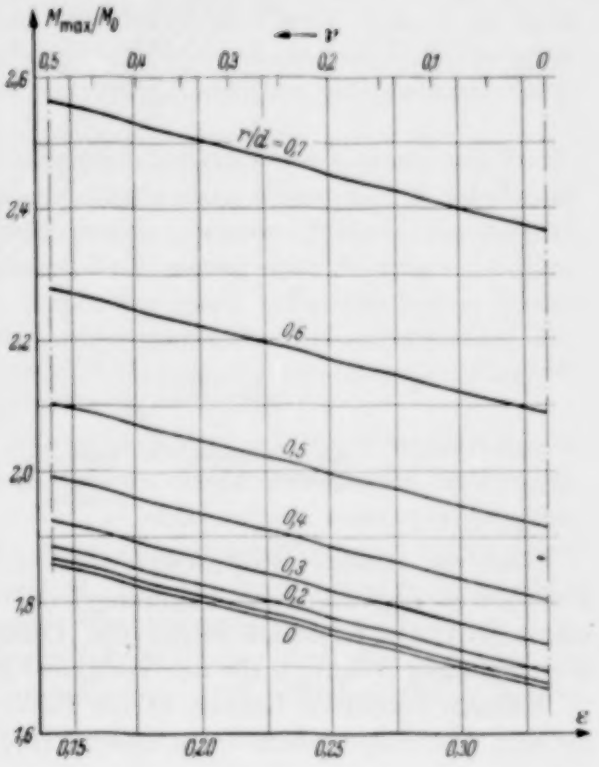

Abb. 2. Maximales Biegemoment für reine Biegung um y-Achse.

Tabelle 1. *Zahlenwerte der Koeffizienten* $m_{r,p}$

p \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	4	4	0	−4	0	10	12	2	−8	−12	−8	12	32
2	2	6	5	−10	−26	−2	59	66	−24	−112	−129	−64	184	462
3	3	10	3	−44	−73	78	331	138	−622	−852	104	1128	1591	1298
4			5	20	13	52	−71	20	−16	78	725	−16	−2370	320
5			9	30	−2	−100	−40	18	−364	430	2506	−1122	−6502	5194
6					12	50	38	−106	−237	−276	214	1776	314	−5304
7					27	90	−38	−410	−101	1012	451	−3142	−4360	10802
8							27	120	131	398	256	−948	1346	8774
9							81	270	389	834	2218	3440	321	−5624
10									54	270	1101	2354	−721	−8712
11									243	810	897	380	3106	13402
12											81	540	3211	7500
13											729	2430	1260	−4152
14													0	810
15													2187	7290

[1] *H. Neuber*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 199.

und damit wird der Koeffizient der Spannungserhöhung

$$k_b = \frac{M_{max}}{M_m}.$$

Die Abhängigkeit des Koeffizienten der Spannungserhöhung von r/d und ν zeigt Abb. 3.

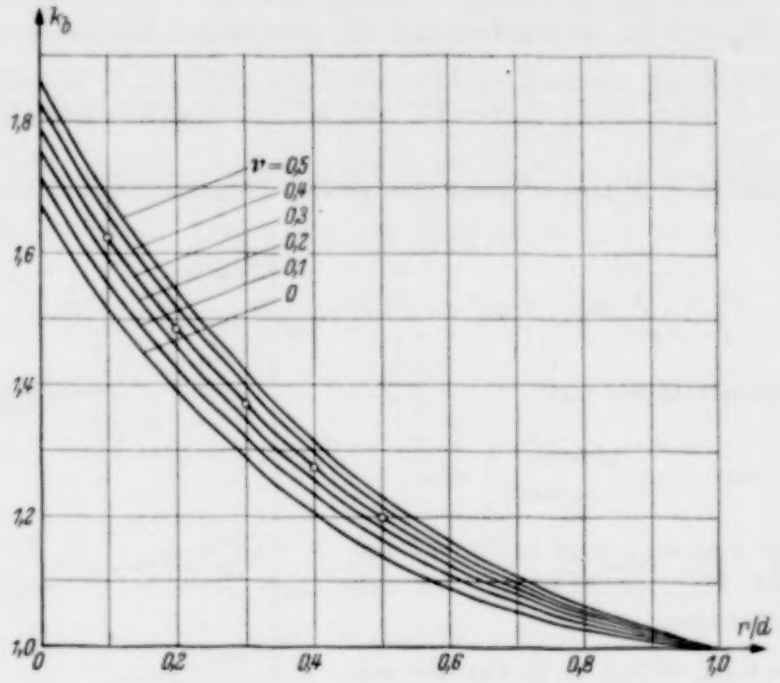

Abb. 3. Koeffizient der Spannungserhöhung k_b in Abhängigkeit von dem Kerbmaß (r/d). Zugleich Lösung für biegebelasteten Streifen mit einem zentralen Kreisloch ($\nu = 0{,}3$). ——— Rechnung. ○○○○○○ Lösung für gelochten Streifen.

Nach der örtlichen Eigenschaft der Spannungsverteilung darf man erwarten, daß der erhaltene Koeffizient zugleich auch näherungsweise die Kerbwirkung eines biegebelasteten Streifens mit einem zentralen Kreisloch wiedergibt. Diese Erwartung wird durch Vergleich mit den Ergebnissen der Rechnung bestätigt, die der Verfasser[1] für solche Streifen durchgeführt hat (Abb. 3).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Emeritus Dr. S. *Higuchi* möchte ich an dieser Stelle für sein dauerndes Interesse an dieser Arbeit und für viele Ratschläge herzlich danken.

(Eingegangen am 12. August 1957.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Osamu Tamate*, Sakurakoji, Sendai (Japan), Tohoku University.

[1] *O. Tamate*, Trans. Japan Soc. Mech. Engineers 20 (1954) S. 687.

Begründung einer auf Kristallplastizität beruhenden mathematischen Plastizitätstheorie

Von H. Lippmann[1]

1. Einleitung. Die mathematische Behandlung der Mechanik deformierbarer Medien stützt sich im allgemeinen auf den Kraft-, Spannungs- und Verformungsbegriff, angewendet auf Volumenelemente. Das *Newton*sche Prinzip von Wirkung gleich Gegenwirkung fordert eine gewisse Einschränkung des Systems der Spannungen und Kräfte, welche sich durch die sog. Bedingung des Spannungsgleichgewichts [siehe Gleichung (3)] ausdrückt. Darüber hinaus setzt man — je nach der Eigenart des betreffenden Mediums — eine Beziehung zwischen Spannungen und Verformungen voraus („rheologisches Grundgesetz", „Stoffgesetz") und versucht, sämtliche entstandenen Gleichungen unter Wahrung der Randbedingungen zu lösen.

Die verschiedenen in der mathematischen Plastizitätstheorie gebräuchlichen Formen des Stoffgesetzes sind phänomenologischer Art[2,3]. Sie gehen in der allgemeinen Form auf *Hencky*[4] und *v. Mises*[5] zurück. Und zwar überträgt man die im Zerreißversuch erwiesene Streckgrenzeneigenschaft von Stahl [Verformung Null für geringe Zugspannung, Verformung zeitabhängig unter Beibehaltung einer konstanten Schwellenzugspannung k_f („Streckgrenze", „Formänderungsfestigkeit"), später Spannungserhöhung („Verfestigung")] auf dreidimensionale Verformung eines Volumenelementes. Den Weg zur exakten Begründung dieser Übertragung wies kürzlich *Ziegler*[6]. Es sind Zusatzannahmen erforderlich.

Demgegenüber gehen wir vom physikalisch bewährten (und bei physikalischen Untersuchungen allein zu Grunde gelegten) Kristallgittermodell aus und schlagen ein darauf beruhendes Stoffgesetz vor (Abschnitt 3). Wir versuchen, hierdurch einem Programm zu entsprechen, welches in jüngster Zeit wiederholt gestellt wurde[7,8]. Wir können verschiedene allgemeine Schlußfolgerungen ziehen, welche bisher in die Ansätze eingingen (Abschnitt 4). Bei den Anwendungen in den Abschnitten 5 und 6 beschränken wir uns auf eindimensionale Spannungszustände und finden u. a. eine zwanglose Erklärung für die viel umstrittene Geschwindigkeitsabhängigkeit der Streckgrenze (Formänderungsfestigkeit), welche durch die Art der Formgebung — evtl. entscheidend — beeinflußt wird.

Zu Beginn präzisieren wir unsere Voraussetzungen.

2. Bezeichnungen und Voraussetzungen. a) Die Punkte eines Metallkörpers K homogener Werkstoffzusammensetzung seien durch (i. a. krummlinige) orthogonale Koordinaten $u = (u^1, u^2, u^3)$ dargestellt. Sie mögen dem Spannungszustand $\sigma = \sigma_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ unterworfen und im (von der Zeit $t \geqq 0$ abhängigen) Gleichgewicht sein, in das sie aus dem spannungsfreien Ausgangszustand durch die Verschiebungen $x^i(\sigma, u, t)$ gelangten. Mit $e = e^{ik}$ bezeichnen wir den wie üblich definierten Verzerrungstensor. Auf die Volumenelemente von K wirke die Volumenkraft $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Über gleichartige ungleichständige Indizes werde summiert.

b) Wir machen folgende Voraussetzungen zur Herleitung des Stoffgesetzes:

I. K setzt sich aus sehr vielen Kristallkörnern zusammen, deren Durchmesser klein gegen die relative Spannungsänderung sind.

Als Faustregel gelte: Keine (oder wenige) Spannungssingularitäten.

Exakte Formulierung: Stellt Δ_r das Symbol einer Änderung längs der Richtung r, $d_r s$ das Längendifferential in der betreffenden Richtung, D_{max} den maximalen Korndurchmesser und σ_{ab}

---

[1] Diese Arbeit entstand im Forschungsinstitut für bildsame Formung der Metalle, Zwickau, dem der Verfasser hierdurch aufrichtig dankt. Sie wurde auszugsweise auf der *Gamm*-Tagung in Hamburg 1957 vorgetragen.

[2] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.

[3] *W. Prager* und *P. G. Hodge*, Theorie ideal-plastischer Körper, Wien 1954.

[4] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 323 und Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 115.

[5] *R. v. Mises*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 161.

[6] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 58; siehe auch *D. C. Drucker*, Quart. Appl. Math. 8 (1950) S. 411.

[7] Verformung und Fließen des Festkörpers, Kolloquium Madrid 1955, *R. Grammel*, S. 1, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.

[8] Verformung und Fließen der Festkörpers, *A. Seeger*, S. 90, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.

eine bestimmte Komponente des Spannungstensors dar, so soll

$$\left|\frac{\Delta_r \sigma_{ab}}{\sigma_{ab}}\right| \leqq \left|\frac{d_r s}{D_{max}}\right| \tag{1}$$

gelten.

II. Herrscht in der Richtung r einer Gleitebene E eines unverspannten Kristalls die Schubspannung σ_r und die Normalspannung σ_n, so gleiten die durch E getrennten Kristallteile in Richtung r abhängig von σ_r, σ_n und t aufeinander ab. Wachsende σ_r und t können den Betrag der Abgleitung nicht verkleinern. Die Spannung $\sigma_r = 0$ bewirkt keine Abgleitung.

III. Innere Verspannungen im (viel-)kristallinen Gefüge erhöhen die zur Erreichung einer bestimmten Abgleitung erforderliche Schubspannung σ_r gegenüber dem unverspannten Gitter um einen ortsabhängigen, zeitunabhängigen Faktor m.

IV. Die Abgleitungen der einzelnen Ebenen summieren sich proportional deren flächenmäßigen Anteilen zur Gesamtverformung, doch treten infolge von Fließbehinderungen im Vielkristall gegenüber dem Einkristall nur die $\lambda(\leqq 1)$-fachen Beträge in Erscheinung. Der Faktor λ ist wie m orts-, doch nicht zeitabhängig.

V. Es existieren eine (von Ort zu Ort stetig veränderliche) Verteilungsdichte $f(n, u)$ der Flächenanteile aller Gleitebenen E im Punkte u, dargestellt als Funktion der Normaleneinsvektoren $n = n^i$ von E, und eine örtliche Dichte $M(u)$ des Flächeninhaltes sämtlicher Gleitebenenflächen von K. Als Normierung soll gelten

$$\overset{(O)}{\int} f(n, u)\, do = 1\,,$$

wobei O die Oberfläche der Einskugel und do das zugehörige Oberflächenelement bedeuten, ferner

$$\overset{(K)}{\int} M(u)\, dV = M\,,$$

wobei M die Gesamtfläche aller Gleitebenen in K und dV das Volumenelement ist.

c) Wir erläutern und ergänzen Voraussetzung I.—V. wie folgt:

Zu I. Eine zu (1) analoge Forderung ist stets dann nötig, wenn diskrete Erscheinungen durch stetige (oder differentierbare usw.) Funktionen oder statistisch angenähert werden sollen. Während sie meist stillschweigend benutzt wird, formulieren wie sie hier explizit. Auf Grund ihrer setzen wir den Spannungstensor örtlich stetig differentiierbar voraus. Die Voraussetzung I ist Voraussetzung für V.

Zu II. Es gibt eine in t und σ_r monoton nicht fallende Funktion $g(t, \sigma_r, \sigma_n)$, welche $g(t, 0, \sigma_n) = 0$ erfüllt und die Abgleitung im unverspannten Einkristall beschreibt. Auf Grund der Kristallplastizitätstheorie ist sie proportional zur Zahl der sog. Versetzungsquellen längs der Gleitrichtung, also wegen der homogenen Werkstoffzusammensetzung proportional zur Länge der Ebene in Gleitrichtung. Beträgt diese $d_r s$, die Abgleitung $d_r u$ (die Annäherung durch Differentiale rechtfertigt sich wegen I), so setzen wir

$$|d_r u| = g(t, \sigma_r, \sigma_n)\, |d_r s|\,. \tag{2}$$

Verschiedene Ansätze für g untersuchen wir in den Abschnitten **5** und **6**.

Zu III. Im Sinne der Kristallplastizität fassen wir „Abgleitung" als Bildung und nachfolgende Auflösung einer sog. „Versetzung" auf[1]. Der Gitterverzerrung und -verspannung durch gebildete, aber nicht aufgelöste Versetzungen messen wir keine makroskopische Wirkung bei, da durch sie infinitesimale Volumenänderungen auftreten, die sich im allgemeinen makroskopisch bemerkbar machen müßten, aber noch nicht beobachtet wurden[2]. Daran ändert nichts, daß für geeignete Körper die Verformung allein auf Grund des Versetzungsmodells ohne meßbare Volumenänderung beschrieben wurde (Balkenbiegung[3, 4].) Hingegen verursachen vorhandene Versetzungen, insbesondere Verdrehung der Körner gegeneinander usw. eine Verspannung, welche eine Erhöhung der kritischen Schubspannung k (die überhaupt erst merkbare Verformung des Kristalls bewirkt) um einen Faktor m verursacht. *Sachs*[5] und *Taylor*[6] errechnen für kubisch-flächenzentrierte Metalle

$$2{,}238 \leqq m \leqq 3{,}06\,,$$

[1] *P. Haasen* und *G. Leibfried*, Fortschr. d. Phys. 2 (1954) S. 73.
[2] *E. Siebel*, Die Formgebung im bildsamen Zustande, Düsseldorf 1932.
[3] *J. F. Nye*, Acta met. 1 (1953) S. 153—162.
[4] *W. T. Read*, Acta met. 5 (1957) S. 83.
[5] *G. Sachs*, Z. VDI 72 (1928) S. 734.
[6] Verformung und Fließen des Festkörpers, *G. I. Taylor*, S. 3, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.

der erstgenannte durch statistische Mittelung über die Kornorientierungen. Wir erweitern die Bedeutung von m auf den ganzen (nicht nur den kritischen) Spannungszustand, vernachlässigen jedoch eine Verformungsabhängigkeit, weil wir die Neubildung von Versetzungen vernachlässigen.

Zu IV. Die Ortsabhängigkeit von λ untersuchten (mit anderer Terminologie) z. B. *Vitovec* und *Slibar*[1, 2]. Nach ihnen ist λ an der Körperoberfläche größer als im Innern, was sich jedoch bei vernünftigen Körpern mit relativ kleiner Oberfläche technisch wenig bemerkbar macht. Verformungsunabhängigkeit bewies *Kochendörfer*[3] für kubisch-flächenzentrierte Metalle. Bei der technisch wichtigen Warmformgebung dürfte sie infolge der Rekristallisation allgemein gelten.

Die Größe des Beitrages der betrachteten Ebenenrichtung E zur Gesamtabgleitung ergibt sich proportional zur Zahl der Versetzungsquellen in einem beliebig breiten Streifen der Ebenen E in Richtung r, also (wegen der Unabhängigkeit von der Streifenbreite) proportional zu dem Produkt

$$\text{Ebene Versetzungsdichte mal Streifenlänge}$$
$$\sim f(n, u) \text{ mal Streifenlänge},$$

welches beim Vielkristall in (2) für $d_r s$ einzusetzen ist.

Zu V. Stetigkeit von f und M bringt lediglich mathematische Vorteile; jedenfalls können auf Grund von I die Größen f und M durch stetige Funktionen angenähert werden. Die Verformungsunabhängigkeit rechtfertigt sich wenigstens bei Warmformgebung durch Rekristallisation.

d) Neben dem Stoffgesetz besteht die oben erwähnte Bedingung des Spannungsgleichgewichtes, welche sich auf Grund der stetigen Differentiierbarkeit von σ bekanntlich durch

$$\text{Div } \sigma = \mathfrak{F} \tag{3}$$

ausdrückt.

3. Das Stoffgesetz. a) Eine gewisse Gleitebene E im Punkte u besitze den Normalen-Einsvektor $n = n^i$. Orthogonal zu diesem, also in E, denken wir die orthogonalen Einsvektoren $v = v^i$, $w = w^i$. Der Einsvektor $r = r^i$ in E besitzt die Darstellung

$$r = v \cos\beta + w \sin\beta,$$

wobei β der Winkel zwischen r und v ist und $0 \leqq \beta < 2\pi$ gilt. Wir betrachten die Schubspannung σ_r, welche der der Spitze von n zugewandte Teil des durch E geteilten Kristallkornes auf den anderen Teil ausübt:

$$\sigma_r = \sigma_{ik}\, n^i\, r^k = \sigma_{ik}\, n^i\, v^k \cos\beta + \sigma_{ik}\, n^i\, w^k \sin\beta.$$

Es gibt eine Richtung $r = r'$, in welcher σ_r verschwindet. Gehört β' zu r', so findet man nämlich

$$\operatorname{tg}\beta' = -\frac{\sigma_{ik}\, n^i\, v^k}{\sigma_{ik}\, n^i\, w^k}$$

für $\sigma_{ik}\, n^i\, w^k \neq 0$ und $\beta' = \frac{\pi}{2}$ für $\sigma_{ik}\, n^i\, w^k = 0$. Hieraus folgt $r' = w$ im zweiten Fall und

$$\pm r' = \frac{(\sigma_{ik}\, n^i\, w^k)\, v - (\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)\, w}{\sqrt{(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)^2 + (\sigma_{ik}\, n^i\, w^k)^2}}$$

im ersten Fall. Es bezeichne r'' einen der in E gelegenen zu r' orthogonalen Einsvektoren, für den $\sigma_{ik}\, n^i\, r''^k \geqq 0$. Man kann dann für nicht verschwindende Nenner eindeutig

$$r'' = \frac{\sigma_{ik}\, n^i\, v^k}{\sqrt{(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)^2 + (\sigma_{ik}\, n^i\, w^k)^2}}\, v + \frac{\sigma_{ik}\, n^i\, w^k}{\sqrt{(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)^2 + (\sigma_{ik}\, n^i\, w^k)^2}}\, w, \tag{4}$$

andernfalls etwa $r'' = v$ setzen.

Wir wählen vorübergehend $v = r''$ sowie $w = r'$ und folgern

$$\sigma_r = \sigma_{ik}\, n^i\, v^k \cos\beta,$$

also eine in β symmetrische Schubspannungsverteilung.

Bei Summation aller zugehörigen Abgleitungen heben sich die zu v orthogonalen Komponenten auf. Nur in Richtung $r = r'' = v$, also in der Richtung maximaler Schubspannung, bleibt Abgleitung übrig. Wählen wir v und w wieder allgemein, so errechnet sich nach (4)

$$\sigma_{r''} = \sigma_{ik}\, n^i\, r''^k = \sqrt{(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)^2 + (\sigma_{ik}\, n^i\, w^k)^2}. \tag{5}$$

r', r'' und (5) sind unabhängig von den speziellen Vektoren v und w.

[1] *A. Slibar* und *F. Vitovec*, Schweiz. Arch. f. angew. Wiss. u. Technik 16 (1950) S. 76.
[2] *F. Vitovec* und *A. Slibar*, Schweiz. Arch. f. angew. Wiss. u. Technik 16 (1950) H. 3.
[3] *A. Kochendörfer*, Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen, Berlin 1941.

b) Wir wählen als Achsenrichtung 1, 2, 3 eines lokalen Koordinatensystems die Richtungen n, r'', r' und bezeichnen darinnen mit ε^{ik} denjenigen Verzerrungstensor, welcher sich ausschließlich auf die Abgleitung in E bezieht. Stimmt E mit einer Gleitebene überein, so erkennt man aus der Betrachtung eines im betreffenden Korn gelegenen hinreichend kleinen Volumenelementes (Kantenlänge dv, Abb. 1), welches durch E halbiert wird, mittels (2)

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon^{21} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\Delta = \frac{\lambda}{2}\, g\left(t, \frac{\sigma_{r''}}{m}, \sigma_n\right),$$

$$\varepsilon^{ab} = 0 \qquad \text{für alle anderen Paare} \qquad a, b\ (= 1, 2, 3).$$

Ein größeres, viele Körner enthaltendes Volumenelement gleicher Lage verformt sich durch Abgleitung auf vielen parallel zu E gelegenen Ebenestücken nahezu parallelepipedisch (ausgezogene schräge Linien in Abb. 1) nach demselben Tensor, jedoch proportional zum Anteil der Ebenenstücken parallel zu E im Verhältnis zu den übrigen. Nach **2** c) (zu IV) müssen wir somit

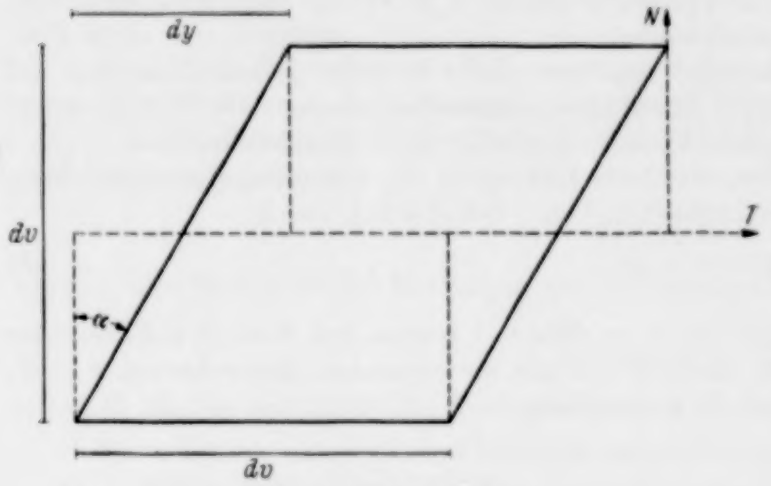

Abb. 1. Abgleitungsmodell.

$$\bar{\varepsilon}^{ik} = M f \varepsilon^{ik}$$

betrachten.

Bezeichnet η^i die Koordinaten irgend eines Vektors im jetzt zugrunde gelegten System, y^i die Koordinaten im ursprünglichen System, so gilt

$$y^i = B^i_k \eta^k$$

mit

$$B^i_1 = n^i, \qquad B^i_2 = r''^i, \qquad B^i_3 = r'^i.$$

Die Koordinaten $\bar{e}^{ik}$ von $\bar{\varepsilon}^{ik}$ im ursprünglichen System lauten folglich

$$\bar{e}^{ik} = B^i_l\, B^k_t\, \bar{\varepsilon}^{lt},$$

das heißt

$$\bar{e}^{ik} = (n^i\, r''^k + r''^i\, n^k)\, \bar{\varepsilon}^{12}.$$

Durchläuft n bei Summation über O alle Richtungen, so tritt jede Gleitebene genau zweimal auf; das Ergebnis ist also zu halbieren:

$$e^{ik} = \frac{M\lambda}{4} \int^{(\bar{O})} f(n, u)\, g\left(t, \frac{\sigma_{r''}}{m}, \sigma_n\right) (n^i\, r''^k + r''^i\, n^k)\, do,$$

oder wegen $\sigma_n = \sigma_{ik}\, n^i\, n^k$, (4) und (5)

$$e^{ik} = \frac{M(u)\,\lambda(u)}{4} \int^{(\bar{O})} do \left\{ f(n, u)\, \frac{g\left(t, \frac{1}{m}\sqrt{(\sigma_{jl}\, nj\, v^l)^2 + (\sigma_{jl}\, nj\, w^l)^2}, \sigma_{jl}\, nj\, n^l\right)}{\sqrt{(\sigma_{jl}\, nj\, v^l)^2 + (\sigma_{jl}\, nj\, w^l)^2}} \right.$$

$$\left. \times\ [(\sigma_{jl}\, n^j\, v^l)\,(n^i\, v^k + n^k\, v^i) + (\sigma_{jl}\, n^j\, w^l)\,(n^i\, u^k + n^k\, w^i)] \right\}, \qquad (6)$$

wo $\bar{O}$ den Teil von O darstellt, auf dem der Nenner nicht verschwindet.

c) Zwar ist (6) unabhängig von v und w, doch treten v und w formal auf und müßten bei Anwendungen ausgerechnet werden. Wir suchen eine Darstellung, in der das nicht mehr der Fall ist. Hierzu wählen wir ein Hauptspannungssystem ($\sigma_{ab} = 0$ für $a \neq b$) als Koordinatensystem und beachten die Orthogonalität der aus n, v, w gebildeten Matrix:

$$(v^a)^2 + (w^a)^2 + (n^a)^2 = 1, \qquad v^a\, v^b + w^a\, w^b + n^a\, n^b = 0 \qquad \text{für} \qquad a \neq b.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{jl}\, n^j\, v^l)^2 + (\sigma_{jl}\, n^j\, w^l)^2 \\
&\quad = (\sigma_{11}\, n^1\, v^1 + \sigma_{22}\, n^2\, v^2 + \sigma_{33}\, n^3\, v^3)^2 + (\sigma_{11}\, n^1\, w^1 + \sigma_{22}\, n^2\, w^2 + \sigma_{33}\, n^3\, w^3)^2 \\
&\quad = (\sigma_{11}\, n^1)^2\, [1 - (n^1)^2] \\
&\qquad + (\sigma_{22}\, n^2)^2\, [1 - (n^2)^2] + (\sigma_{33}\, n^3)^2\, [1 - (n^3)^2] - 2\, \sigma_{11}\, \sigma_{22}\, (n^1\, n^2)^2 \\
&\qquad - 2\, \sigma_{22}\, \sigma_{33}\, (n^2\, n^3)^2 - 2\, \sigma_{33}\, \sigma_{11}\, (n^3\, n^1)^2 \\
&\quad = -\,[\sigma_{11}\, (n^1)^2]^2 - [\sigma_{22}(n^2)^2]^2 - [\sigma_{33}(n^3)^2]^2 - 2\, \sigma_{11}(n^1)^2\, \sigma_{22}(n^2)^2 \\
&\qquad - 2\, \sigma_{11}(n^1)^2\, \sigma_{33}(n^3)^2 - 2\, \sigma_{22}(n^2)^2\, \sigma_{33}(n^3)^2 \\
&\quad = -\,[\sigma_{11}(n^1)^2 + \sigma_{22}(n^2)^2 + \sigma_{33}(n^3)^2]^2 + (\sigma_{11}\, n^1)^2 + (\sigma_{22}\, n^2)^2 + (\sigma_{33}\, n^3)^2.
\end{aligned}$$

Drückt man dies in einer für allgemeine orthogonale Koordinaten legitimen Form aus, so sieht man sofort

$$(\sigma_{jl}\, n^j\, v^l)^2 + (\sigma_{jl}\, n^j\, w^l)^2 = \sum_j (\sigma_{jl}\, n^l)^2 - (\sigma_{jl}\, n^j\, n^l)^2 . \tag{7}$$

Im Hauptspannungssystem selbst erhält man eine symmetrische Form, wenn man nach dem zweiten Gleichheitszeichen der obigen Umrechnung ersetzt $1 - (n^i)^2 = (n^{i+1})^2 + (n^{i+2})^2$ (Exp. mod 3):

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2\, (n^1\, n^2)^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2\, (n^2\, n^3)^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\, (n^3\, n^1)^2 . \tag{8}$$

Schließlich muß in (6) die eckige Klammer umgerechnet werden. Hierzu beachten wir

$$\begin{aligned}(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)\, (n^a\, v^b + n^b\, v^a) + (\sigma_{ik}\, n^i\, u^k)\, (n^a\, u^b + n^b\, u^a)\\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{ab}} + \frac{\partial}{\partial \sigma_{ba}}\right)[(\sigma_{ik}\, n^i\, v^k)^2 + (\sigma_{ik}\, n^i\, u^k)^2] .\end{aligned} \tag{9}$$

Setzen wir für die eckige Klammer der rechten Seite von (9) die rechte Seite von (7) ein, so gewinnen wir die umgeformte linke Seite und schließlich

$$\begin{aligned}e^{ik} = \frac{M(u)\,\lambda(u)}{4} \int^{(\varphi)} f(n, u)\, \frac{g\left(t, \frac{1}{m}\sqrt{\sum_j (\sigma_{jl}\, n^l)^2 - (\sigma_{jl}\, n^j\, n^l)^2}, \sigma_{jl}\, n^i\, n^l\right)}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{jl}\, n^{\ })^2 - (\sigma_{jl}\, n^i\, n^l)^2}}\\ \times\, [n^i\, (\sigma_{kl}\, n^l) + n^k\, (\sigma_{il}\, n^l) - 2\, n^i\, n^k\, (\sigma_{jl}\, n^j\, n^l)]\, do ,\end{aligned} \tag{10}$$

wo wie bei (6) $\bar{O} \subset O$ durch

$$\sum_j (\sigma_{jl}\, n^l)^2 - (\sigma_{jl}\, n^j\, n^l)^2 > 0$$

charakterisiert wird.

Gleichung (6) bzw. (10) ist die allgemeinste Form des Stoffgesetzes.

4. Allgemeine Folgerungen. a) $\sum e^{ii} = 0$ bedeutet (infinitesimale) Volumenkonstanz. Sie war auf Grund von **2** c) (zu III) zu erwarten und folgt aus $\sum \bar{\varepsilon}^{ii} = 0$: Orthogonale Rücktransformation liefert $\sum \bar{e}^{ii} = 0$, Integration die Behauptung.

b) Hydrostatischer Druck $\sigma_{ii} = p$, $\sigma_{ik} = 0$ für $i \neq k$ bewirkt keine Verformung. Dies folgt aus (10) wegen

$$\sum_j (\sigma_{jl}\, n^l)^2 - (\sigma_{jl}\, n^j\, n^l)^2 = 0 .$$

c) $\sigma_{ab} = 0$ für alle a, b mit $a \neq b$ bewirkt $e^{ab} = 0$: Die Achsenrichtungen des Spannungs- und Verzerrungsellipsoides fallen zusammen. Wir betrachten $e^{ab} (a \neq b)$ und setzen c gleich der unter a, b nicht enthaltenen Zahl aus (1, 2, 3). Alsdann zerlegen wir die Summation über O in Summation über die beiden Teile O_1, O_2, welche durch die (a, c)-Ebene getrennt werden, und gehen von (6) aus. Einem gewissen Dreibein (n, v, w), für welches die Spitze von n auf O_1 liegt, ordnen wir eineindeutig ein zweites orthonormales Dreibein $(\bar{n}, \bar{v}, w)$ mit der Spitze von $\bar{n}$ auf O_2 zu durch

$$\begin{aligned}&\bar{n}^a = n^a , && \bar{n}^b = -n^b , && \bar{n}^c = n^c ,\\ &\bar{v}^a = v^a , && \bar{v}^b = -v^b , && \bar{v}^c = v^c ,\\ &\bar{w}^a = -u^a , && \bar{w}^b = u^b , && \bar{w}^c = -w^c .\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\sigma_{jl}\, \bar{n}^j\, \bar{v}^l = \sigma_{jl}\, n^j\, v^l , \quad \sigma_{jl}\, \bar{n}^j\, \bar{w}^l = -\sigma_{jl}\, n^j\, w^l , \quad \sigma_{jl}\, \bar{n}^j\, \bar{n}^l = \sigma_{jl}\, n^j\, n^l ,\\ &\bar{n}^a\, \bar{v}^b + \bar{n}^b\, \bar{v}^a = -(n^a\, v^b + n^b\, v^a) , \quad \bar{n}^a\, \bar{w}^b + \bar{n}^b\, \bar{w}^a = n^a\, w^b + n^b\, u^a ,\\ &(\sigma_{jl}\, \bar{n}^j\, \bar{v}^l)^2 + (\sigma_{jl}\, \bar{n}^j\, \bar{w}^l)^2 = (\sigma_{jl}\, n^j\, v^l)^2 + (\sigma_{jl}\, n^j\, w^l)^2 .\end{aligned}$$

Zugeordnete Integranden besitzen folglich entgegengesetztes Vorzeichen: Summationen über O_1 und O_2 heben sich auf.

d) Ist $g(t, \sigma_\tau, \sigma_n) = g(t, \sigma_\tau)$ nicht von σ_n abhängig, so existiert eine nach σ_{ik} differentiierbare Funktion $F(u, \sigma)$ („plastisches Potential") mit

$$e^{ik} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ik}} F(u, \sigma) . \tag{11}$$

Die Funktion F besitzt die unten angegebene Gestalt (12). Die genannte Bedingung ist unter gewissen Zusatzannahmen auch notwendig, z. B.: $g(t, \sigma_\tau, \sigma_n)$ möge für wachsende σ_n (zunehmende Reibung) nicht wachsen[1].

Wenn nämlich $g(t, \sigma_\tau, \sigma_n) = g(t, \sigma_\tau)$, so erfüllt wegen (9) und (11)

$$F(u, \sigma) = \frac{M(u)\,\lambda(u)}{4} \int^{(\varphi)} f(n, u)\, do \left\{ \int_0^s g\left(t, \frac{x}{m}\right) dx + \int_0^s g\left(t, \frac{x}{m}\right) dx \right\} \tag{12}$$

die Behauptung mit $s = \sqrt{\sum_j (\sigma_{ik}\, n^i)^2 - (\sigma_{ik}\, n^i\, n^k)^2}$ als obere Grenze.

Es werde nun (11) unter der gemachten Zusatzannahme vorausgesetzt, und es gelte etwa für $\sigma_n < \sigma_{n'}$ und bestimmtes σ_τ: $g(t, \sigma_\tau, \sigma_n) < g(t, \sigma_\tau, \sigma_{n'})$. Dann betrachten wir eine geschlossene, stetige, nicht zu einem Punkt entartete Kurve U im Raum der drei Hauptspannungen (als Unterraum des neundimensionalen Spannungsraumes), welche einen Punkt P besitzt, in dem

$$\sqrt{\sum_j (\sigma_{ik}\, n^k)^2 - (\sigma_{ik}\, n^i\, n^k)^2} = \sigma_\tau\,, \qquad \sigma_{ik}\, n^i\, n^k = \sigma_n$$

gilt. Die erste Gleichung ist nach (8) durch entsprechend große Hauptspannungsdifferenzen erfüllbar, die zweite durch Addition einer gewissen Konstanten zu allen σ_{ik}. In P möge ferner U eine Strecke parallel der σ_{11}-Achse durchlaufen derart, daß $d\sigma_{11} > 0$. Durchläuft σ die Kurve U, so beschreibt $\tau_{ik} = \sigma_{ik} + (\sigma_n' - \sigma_n)\,\delta_{ik}$ in einer Umgebung von P, wo $d\sigma_{22} = d\sigma_{33} = 0$, $\tau_{ik} = \sigma_{ik}$ sonst — eine Kurve U'. Wegen (11)

$$\int^{(U)} e^{ik}\, d\sigma_{ik} = 0\,.$$

Dann gilt wegen (8) und (10), da sich nur die Normalspannung ändert,

$$\int^{(U')} e^{ik}\, d\tau_{ik} > 0$$

im Widerspruch zu (11). Zwar ist U' an zwei Punkten unstetig und nicht zusammenhängend, kann aber ersichtlich ohne Änderung des Ergebnisses zu einer geschlossenen stetigen Kurve vervollständigt werden.

c) Ist g unabhängig von der Normalspannung σ_n, so ist e^{ik} unabhängig von einem zusätzlichen hydrostatischen Druck (Ergänzung zu b)[2]. Man erkennt dies nach (8) und (9) (Umrechnung der geschweiften Klammer von (6) bzw. (10) auf Hauptspannungen) im Hauptspannungssystem.

f) Die Abschnitte a) bis c) enthielten Folgerungen, die wir auf Grund unseres Modells beweisen konnten. In der phänomenologischen Plastizitätstheorie dienten sie als Axiome. Lediglich die Einführung des plastischen Potentials bedurfte einer Hypothese, welche naheliegt und etwa durch Abschnitt e) gerechtfertigt wird. Dies ist wiederum Axiom der gebräuchlichen Theorie. Gleichung (11) entspricht der *Mises*schen Form des Stoffgesetzes und unterscheidet sich von dieser erstens durch das Fehlen eines ortsabhängigen Proportionalitätsfaktors, dafür Ortsabhängigkeit von F selbst (welche jedoch ebenfalls schon betrachtet wurde, vgl. *Olszak*[3]), und zweitens durch das Fehlen einer „Fließbedingung" $F = \text{konst.} = k_f$ (vgl. jedoch Abschnitt **6** a).

5. Theorie der Drahtdehnung. a) Die physikalischen Anwendungen unserer Theorie unterscheiden sich von den technischen des folgenden Abschnittes durch die Wahl von g.

Der Verfasser[4] entwickelte auf Grund einer Hypothese von *Engelhardt*[5] über die Grundlagen der Drahtdehnung Formeln für die sog. „spontane Dehnung" $\gamma(\tau)$ (Dehnung, die sich kurzzeitig nach Belastung auswirkt) und das sog. „Kriechen" $d(\tau, t)$ (τ die Zugspannung, t die Zeit)

$$\gamma(\tau) = A \int_{a/\tau}^{\infty} f(x)\, dx\,, \tag{13}$$

$$d(\tau, t) = A \left\{ \int_0^{a/\tau} f(x)\, dx - \int_0^{a/\tau} f(x)\, e^{-t\,w(\tau\,x)}\, dx \right\}, \tag{14}$$

[1] Eine andere derartige Zusatzannahme: (11) möge für alle Verteilungsdichten $f(n, u)$ gelten.

[2] Auch hier ist die Umkehrung unter gewisse Zusatzannahmen richtig, z. B. der in der vorangehenden Fußnote.

[3] *W. Olszak*, Elastisch-plastische Biegung von nicht-homogenen orthotropen Kreisplatten. Vortrag *Gamm*-Tagung in Hamburg 1957.

[4] *H. Lippmann*, Acta met. 4 (1956) S. 298.

[5] *W. Engelhardt*, Z. Metallkde. 42 (1951) S. 117.

wo A und a gewisse positive Konstanten, $f(x)$ eine statistische Verteilungsdichte, meist Gaußisch

$$f(x) = B\, e^{-h^2 (x-b)^2}\,, \tag{15}$$

mit B als Normierungsfaktor, h als Präzisionsmaß, b = konst., und $w(x)$ eine monoton für $0 \leqq x \leqq a$ wachsende Funktion mit $w(0) = 0$, $w(a) = 1$ darstellt. Die sich ergebenden Kurven werden diskutiert und gezeichnet (qualitativ in Abb. 2 und 3). Sie widersprechen nicht den Experimenten[1]. Der Ausdruck für die gesamte plastische Dehnung lautet

$$D(\tau, t) = d(\tau, t) + \gamma(\tau)\,.$$

Genaue Durchsicht der erwähnten Theorie vom hier dargestellten Blickpunkt aus erweist, daß sie sich (wie die meisten derartigen) lediglich auf die Abgleitung einer einzigen Gleitebene unter der Schubspannung $\sigma_r = \tau$ bezieht.

Für uns ergeben sich nach allem bei passender Wahl des Faktors A die Ansätze

$$g = \gamma \quad \text{bzw.} \quad g = d\,. \tag{16}$$

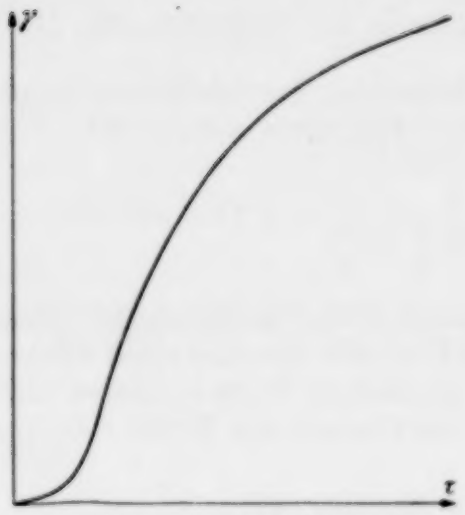

Abb. 2. Spontane Abgleitung.

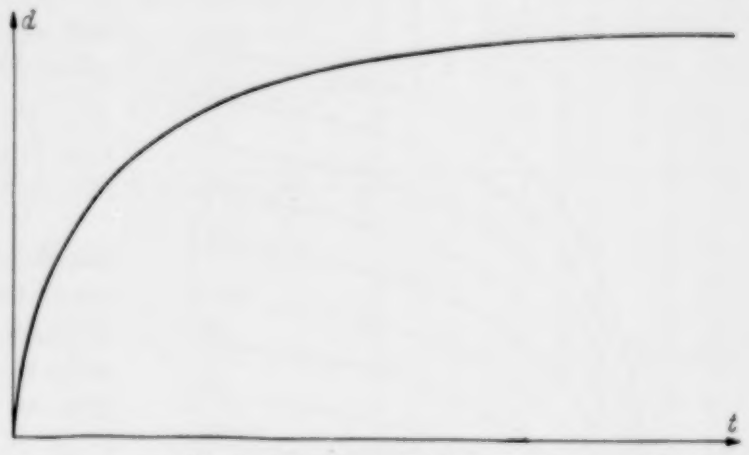

Abb. 3. Zeitabhängige Abgleitung für τ-constant.

b) Der eindimensionale Spannungszustand $\sigma_{11} = \tau$, $\sigma_{ab} = 0$ für $a \neq 1$ oder $b \neq 1$ genügt der Gleichgewichtsbedingung (3) bei Vernachlässigung von Volumenkräften. Er läßt sich durch einen langgestreckten zylindersymmetrischen Körper von geringem Querschnitt mit an den Enden aufgezwungener, über den Querschnitt konstanter Zug- oder Druckspannung realisieren, wenn der Zylindermantel spannungsfrei bleibt. Beispiele: Drahtdehnung, Zerreißversuch, Stauchversuch schlanker zylindrischer Proben ohne Reibung an den Preßflächen.

c) Wir betrachten $\varepsilon = e^{11}$ und setzen

$$n^1 = \cos\psi\,, \qquad n^2 = \sin\psi\cos\varphi\,, \qquad n^3 = \sin\psi\sin\varphi \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,, \qquad 0 \leqq \psi \leqq \pi)\,,$$

also

$$do = \sin\psi\, d\varphi\, d\psi\,,$$

$$\sqrt{\Sigma\,(\sigma_{ik}\, n^k)^2 - (\sigma_{ik}\, n^i\, n^k)^2} = \tau\,|\cos\psi\sin\psi|\,,$$

$$n^1(\sigma_{1l}\, n^l) + n^1(\sigma_{1l}\, n^l) - 2(n^1)^2\,(\sigma_{ik}\, n^i\, n^k) = 2\,\tau\cos^2\psi\sin^2\psi\,.$$

Unser Draht sei isotrop, d. h. $f \equiv (4\pi)^{-1}$, und homogen, d. h. m, M, λ = konst. Es folgt nach (10)

$$\varepsilon = \frac{M\lambda}{4}\int_0^{\pi} g\left(t, \frac{\tau}{m}\,|\cos\psi\sin\psi|\,,\ \tau\cos^2\psi\right)|\cos\psi|\,\sin^2\psi\, d\psi\,. \tag{17}$$

Wir setzen nunmehr Unabhängigkeit von σ_n voraus und formen weiter um:

$$\varepsilon = \frac{M\lambda}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} g\left(t, \frac{\tau}{2m}\sin 2\psi\right)\sin 2\psi\,\sqrt{1-\cos 2\psi}\, d\psi$$

$$= \frac{M\lambda}{8\sqrt{2}}\int_0^{\pi} g\left(t, \frac{\tau}{2m}\sin x\right)\sin x\,\sqrt{1-\cos x}\, dx$$

$$= \frac{M\lambda}{8\sqrt{2}}\left\{\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{M\lambda}{8\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} g\left(t, \frac{\tau}{m}\sin x\right)\sin x\,\{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}\}\, dx\,.$$

[1] *G. Müller*, nach persönlichen Mitteilungen.

Da

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sin x}\ ,$$

so ist

$$\varepsilon=\frac{M\lambda}{8}\int_0^{\pi/2} g\left(t,\frac{\tau}{m}\sin x\right)\sin x\sqrt{1+\sin x}\,dx \tag{18}$$

unabhängig von u[1].

d) Setzen wir $g=d$, so erkennt man aus der Positivität des Integranden und weil g für jedes feste τ und x einer Kurve der Abb. 3 folgt, daß diese qualitativ auch für unsere jetzige Dehnung richtig ist. Eine ähnliche Entscheidung für $g=\gamma$ fällt schwerer. Wir umgehen sie durch numerische Auswertung. Dazu setzen wir die Proportionalitätsfaktoren

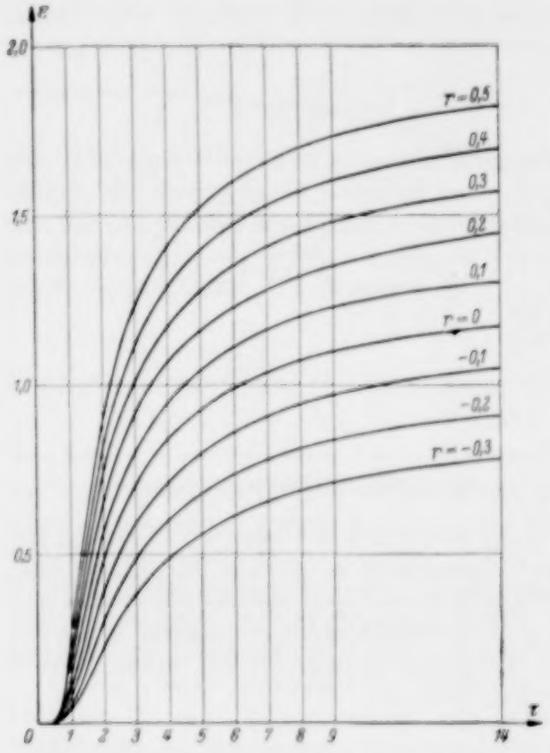

Abb. 4. Theoretische spontane Dehnung eines Metalldrahtes in Abhängigkeit von der Spannung τ und dem Parameter r.

$$\frac{A\,B\,M\lambda\sqrt{\pi}}{16\,h}=2\,a\,h\,m=1 \qquad \text{[vgl. (13), (14), (15)]}$$

und erhalten bei Benutzung des tabellierten *Gauß*schen Fehlerintegrals $E(x)$ sowie mit $\bar{r}=h\,b$

$$\varepsilon=\int_0^{\pi/2}\left[1-E\left(\frac{1}{\tau\sin x}-\bar{r}\right)\right]\sin x\sqrt{1+\sin x}\,dx\ . \tag{19}$$

Der Wert $\bar{r}=0$ entspricht dem bei *Lippmann*[1] allein behandelten Fall $b=0$. Wir verzichten auf exakte Ausrechnung für verschiedene Werte $\bar{r}$, nähern vielmehr für kleine $\bar{r}$ linear mittels der *Taylor* entwicklung an:

$$\varepsilon=F(\tau)+r\,G(\tau)\ ,$$

wobei

$$F(\tau)=\int_0^{\pi/2}\left[1-E\left(\frac{1}{\tau\sin x}\right)\right]\sin x\sqrt{1+\sin x}\,dx\ ,$$

$$G(\tau)=\int_0^{\pi/2}\left[e^{-\left(\frac{1}{\tau\sin x}\right)^2}\right]\sin x\sqrt{1+\sin x}\,dx\ ,$$

$$r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\bar{r}\ .$$

Eine daraus numerisch ermittelte Kurvenschar findet sich in Abb. 4. Der allgemeinste Fall (beliebige Konstanten) entsteht durch kombinierte lineare Verzerrung beider Achsen. In der Tat entsprechen die Kurven qualitativ denjenigen von Abb. 2.

6. Zerreiß- und Stauchversuch. a) Wird beim Drahtdehnungsexperiment im allgemeinen die Spannung konstant gehalten, so beim Zerreiß- und Stauchversuch die Geschwindigkeit. Wir befassen uns mit dem eindimensionalen Spannungszustand (5 b) und benutzen im wesentlichen die Terminologie des vorangegangenen Abschnittes.

Zerreiß- und Stauchprüfungen finden vorwiegend an Stahl statt, wo γ (Abb. 2) zu einem eckigen zeitlich verzögerten Verlauf ausartet, während das Kriechen zu vernachlässigen ist:

$$\gamma=\begin{cases}0 \text{ für } \sigma_r<k\ ,\\ \text{Funktion von } t \text{ und } \sigma_r \text{ für } \sigma_r\geqq k\ .\end{cases}$$

Die kritische Schubspannung k möge nur vom Werkstoff und dessen Beschaffenheit (Temperatur) abhängen (Abschnitt 2 c) zu III). In Abb. 2 und 4 wurde t nicht berücksichtigt. Sie beziehen sich auf $t\to\infty$ oder stationäre Vorgänge.

Wir denken die zweite Zeile unserer neuen Definitionsgleichung von γ in eine Potenzreihe nach σ_r entwickelt und brechen diese nach dem ersten nicht-verschwindenden Glied (Exponent $N\geqq 0$)

[1] Vgl. Fußnote 4 auf Seite 192.

ab. Dies ergibt den Ansatz

$$g(t, \sigma_r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \sigma_r < k \\ h(t)\left(\dfrac{\sigma_r}{k}\right)^N & \text{für} \quad \sigma_r \geq k\,. \end{cases} \tag{20}$$

Uns interessiert die Streckgrenze (Formänderungsfestigkeit) k_f, d. h. diejenige Zugspannung, welche zur Aufrechterhaltung einer gewissen Dehnungsgeschwindigkeit (Stauchgeschwindigkeit) nötig ist. k_f wird sich unabhängig von der Verformung, aber abhängig von der Geschwindigkeit ergeben.

Formel (20) ähnelt der phänomenologischen Fließbedingung (vgl. unsere Bemerkung in 4. f)) und gibt ein Analogon zum ideal-plastischen Körper[1].

b) In (17) ist jetzt nur über ein Teilintervall von $\langle O, \pi\rangle$ zu integrieren, dadurch definiert, daß dort

$$\frac{\tau}{m}\,|\cos\psi \sin\psi| = \frac{2\,m}{\tau}\,|\sin 2\,\psi| \geqq k$$

oder

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\,m\,k}{\tau} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\,m\,k}{\tau}\,,$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\,m\,k}{\tau} \leqq \psi \leqq \pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\,m\,k}{\tau}\,.$$

Verformung tritt also erst für $\tau \geqq 2\,m\,k$ auf.

Mit (20), (17) und der Abkürzung

$$e = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\,m\,k}{\tau} \tag{21}$$

folgt

$$\varepsilon = \frac{M\,\lambda}{4}\,h(t)\left(\frac{\tau}{m\,k}\right)^N \left[\int_e^{\pi/2-e} + \int_{\pi/2+e}^{\pi-e}\right] \sin\psi\,|\cos\psi \sin\psi|^{N+1}\,d\psi\,,$$

$$\varepsilon = \frac{M\,\lambda}{2}\,h(t)\left(\frac{\tau}{m\,k}\right)^N \int_e^{\pi/2-e} \sin^{N+2}\psi\cos^{N+1}\psi\,d\psi\,. \tag{22}$$

c) Wir berechnen das unbestimmte Integral

$$I = \int \sin^{N+2}\psi\cos^{N+1}\psi\,d\psi\,.$$

1. Ist N gerade, so gilt

$$\cos^N\psi = (\cos^2\psi)^{N/2} = (1 - \sin^2\psi)^{N/2} = \sum_{\varrho=0}^{N/2}{}' (-1)^\varrho \binom{N/2}{\varrho} \sin^{2\varrho}\psi\,,$$

also

$$I = \sum_{\varrho=0}^{N/2}{}' (-1)^\varrho \binom{N/2}{\varrho} \int \sin^{N+2\varrho+2}\psi\cos\psi\,d\psi = \sum_{\varrho=0}^{N/2}{}' (-1)^\varrho \frac{\binom{N/2}{\varrho}}{N+2\varrho+3}\sin^{N+2\varrho+3}\psi\,.$$

2. Ist N ungerade, so gilt wie oben

$$\sin^{N+1}\psi = \sum_{\varrho=0}^{(N+1)/2}{}' (-1)^\varrho \binom{(N+1)/2}{\varrho} \cos^{2\varrho}\psi\,,$$

also

$$I = -\sum_{\varrho=0}^{(N+1)/2} \frac{(-1)^\varrho \binom{(N+1)/2}{\varrho}}{N+2\varrho+2}\cos^{N+2\varrho+2}\psi\,.$$

Einsetzen der Grenzen e und $\frac{\pi}{2} - e$ liefert in beiden Fällen Faktoren von der Gestalt

$$\cos^R e - \sin^R e = (\cos e - \sin e)\sum_{\lambda=0}^{R-1}{}' \cos^\lambda e \sin^{R-1-\lambda} e \qquad (R \geqq 3,\ \text{ungerade})$$

$$= (\cos e - \sin e)\left[\cos^{\frac{R-1}{2}} e \sin^{\frac{R-1}{2}} e + \sum_{\lambda=0}^{(R-1)/2-1} \left\{\cos^\lambda e \sin^{R-1-\lambda} e + \sin^\lambda e \cos^{R-1-\lambda} e\right\}\right].$$

[1] Vgl. Fußnote 3 auf Seite 187.

Wegen

$$\cos c = 1\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 2c}}\,, \qquad \sin c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 2c}}$$

folgt nach Einsetzen von (21)

$$\cos c - \sin c = \sqrt{(\cos c - \sin c)^2} = \sqrt{1-\frac{2mk}{\tau}}$$

und

$$\cos^R c - \sin^R c = \frac{\cos c - \sin c}{2^{(R-1)/2}}\left\{\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^{\frac{R-1}{2}} + 2\sum_{\mu=0}^{\frac{R-1}{2}-1}\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{R-1}{2\nu}\cdot\left[1-\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^2\right]^{\nu}\right\}.$$

Man beachte hierbei, daß keine Wurzeln auftreten, weil sich diese in der Differenzbildung wegheben. Ferner handelt es sich wegen $\binom{A}{B} = 0$ für $B > A$ nur um endliche Summen. Wir erhalten schließlich als Endresultat, daß sich ε als Produkt von $\left(\frac{\tau}{mk}\right)^N$, $\sqrt{1-\frac{2mk}{\tau}}$ und einem Polynom in $\frac{mk}{\tau}$ darstellt:

$$\varepsilon = \frac{M\lambda}{2}h(t)\left(\frac{\tau}{mk}\right)^N\sqrt{1-\frac{2mk}{\tau}}\;S(N,\tau) \qquad \text{mit} \qquad \tau \geqq 2mk \tag{23a}$$

und

$$S = \sum_{\varrho=0}^{N/2}\frac{(-1)^{\varrho}\binom{N/2}{\varrho}}{N+2\varrho+3}\left\{\left(\frac{mk}{\tau}\right)^{\frac{N}{2}+\varrho+1} + 2^{-\left(\frac{N}{2}+\varrho\right)}\sum_{\mu=0}^{N/2+\varrho}\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{N}{2}+\varrho+1-\mu}{2\nu}\right.$$
$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^2\right]^{\nu}\right\} \tag{23b}$$

für gerade N,

$$S = \sum_{\varrho=0}^{\frac{N+1}{2}}\frac{(-1)^{\varrho}\binom{(N+1)/2}{\varrho}}{N+2\varrho+2}\left\{\left(\frac{mk}{\tau}\right)^{\frac{N+1}{2}+\varrho} + 2^{-\left(\frac{N-1}{2}+\varrho\right)}\sum_{\mu=0}^{\frac{N-1}{2}+\varrho}\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{N+1}{2}+\varrho-\mu}{2\nu}\right.$$
$$\left.\times\left[1-\left(\frac{2mk}{\tau}\right)^2\right]^{\nu}\right\} \tag{23c}$$

für ungerade N.

d) Die umständlichen Gleichungen (23) lassen sich für größere τ asymptotisch annähern. Es ist

$$(1+1)^{\frac{N}{2}+\varrho+1} + (1-1)^{\frac{N}{2}+\varrho+1} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{N}{2}+\varrho+1}{2\nu},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{N}{2}+\varrho+1}{2\nu} = 2^{\frac{N}{2}+\varrho},$$

entsprechend

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{N+1}{2}+\varrho}{2\nu} = 2^{\frac{N-1}{2}+\varrho}.$$

Demnach strebt ε für jedes feste t und $\tau \to \infty$ asymptotisch gegen eine Parabel N-ter Ordnung:

$$\varepsilon \sim \frac{M\lambda}{2}h(t)\left(\frac{\tau}{mk}\right)^N\cdot\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{N/2}\frac{(-1)^{\varrho}\binom{N/2}{\varrho}}{N+2\varrho+3}\\ \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\frac{N+1}{2}}\frac{(-1)^{\varrho}\binom{(N+1)/2}{\varrho}}{N+2\varrho+2}\end{array}\right\}\ \text{für}\ N\left\{\begin{array}{l}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{array}\right\} \tag{24}$$

Spezialfälle sind

$$N = 0\,, \qquad \varepsilon \sim \frac{M\lambda}{6} h(t) = C(t)\,,$$

$$N = 1\,, \qquad \varepsilon \sim \frac{4}{5} C(t) \frac{\tau}{2mk}\,.$$

Genaue Auswertung nach (23) gibt

$$N = 0\,, \qquad \varepsilon = C(t) \sqrt{1 - \frac{2mk}{\tau}} \left(1 + \frac{mk}{\tau}\right).$$

$$N = 1\,, \qquad \varepsilon = \frac{4}{5} C(t) \frac{\tau}{2mk} \sqrt{1 - \frac{2mk}{\tau}} \left[1 + \frac{mk}{\tau} + \frac{3}{2}\left(\frac{mk}{\tau}\right)^2\right].$$

e) Die Existenz der Streckgrenze (Formänderungsfestigkeit) bei Stahl besagt: Fließgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon} = \text{konst.} = v/L$ (v = Ziehgeschwindigkeit, L = Augenblickslänge $\approx$ Anfangslänge der Probe — entsprechend bei Stauchung) für $\tau = k_f$, also $\dot{\tau} = 0$. Nach (23): $\dot{h}(t) = 0$, $h(t) = c\,t$. Dies in (23), (24) usw. eingesetzt, ergibt nach Differentiation und Substitution $\tau = k_f$ die jeweilige Geschwindigkeitsabhängigkeit von k_f.

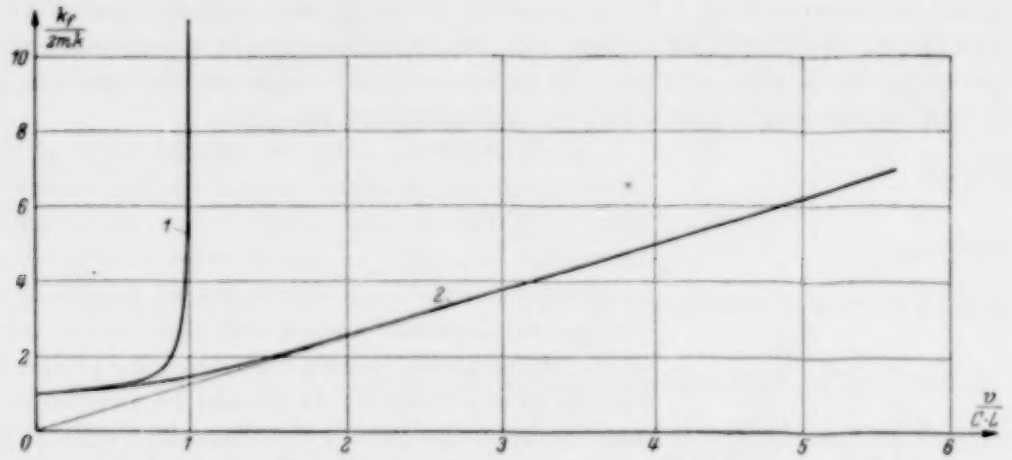

Abb. 5. Theoretische Geschwindigkeitsabhängigkeit der Streckgrenze für $N = 0$ (Kurve 1) und $N = 1$ (Kurve 2).

Mit $C = M\lambda c/6$ ist in Abb. 5 $-k_f/2mk$ gegen v/CL aufgetragen. Für $N = 0$ existiert eine maximale Ziehgeschwindigkeit. Die Näherung durch die jeweilige Parabel N-ter Ordnung [nach (24)] ist gut. Das Experiment muß über die Größe von N entscheiden.

Besonders wichtig scheint uns folgende abschließende Bemerkung:
Die Geschwindigkeitsabhängigkeit von k_f erhält man bei konstantem k — bei geschwindigkeitsabhängigem k erst recht — unter wesentlicher Benutzung der Körperform und Verformungsart. Sie kann bei Änderung dieser Verhältnisse durchaus anders als hier ausfallen. Infolgedessen sind beispielsweise in dynamischen Freistauchversuchen ermittelte Werte k_f nicht für das Gesenkschmieden, Strangpressen, Blechbiegen, Walzen usw. verwendbar. Hieraus erklärt sich zwanglos die schlechte Übereinstimmung bei den Experimenten verschiedener Autoren. Wir formulieren: Die Größe k_f ist nicht nur von Werkstoff und Geschwindigkeit, sondern auch von der Verformungsart und der erstrebten Körperform abhängig.

(Eingegangen am 29. August 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Horst Lippmann*, Hannover-Döhren, Am Lindenhofe 37.

The Elastic Problem of a Homogeneous Circular Ring Acted Upon by Equally Spaced Concentrated Twists of Equal Magnitude *

By **I. Malkin**

1. Introduction. The problem of a circular ring under twist occupies in a certain sense of the word a solitary position among the one-dimensional problems of Applied Elasticity. Indeed, it would not be simple to find, among the problems of the group just referred to, another one of the nature of a paradox like our present problem. Referring even to its most elementary special case as represented in [1][1], which is based essentially upon *Grammel*'s work on the subject (see below), we see that a circular ring acted upon by uniformly distributed twist, is actually in bending, while the torsional stresses are zero; while the stresses produced in such a ring are thus virtually bending stresses, the bending deformation is zero. We will see below that the unusual nature of the problem becomes even more emphatic in the non-elementary case, when the twisting action is not uniformly distributed along the entire periphery of the circular ring, like in the special case treated in [1], but concentrated to a finite number of equal and equally spaced twist moments. We arrive at a situation which calls for a thorough and careful study of a seemingly simple problem. An attentive investigation is very necessary in order to avoid considerable errors in such practical applications, in which the ring under twist is an important element.

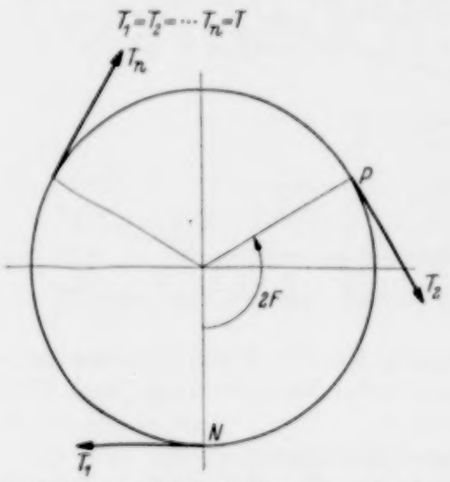

Fig. 1. Ring Acted Upon by Concentrated Equally Spaced and Equal Twist Moments.

A satisfactory solution of the title problem will be derived in the present paper on the basis of *Grammel*'s theory of the circular ring under twist by concentrated moments [2], [3]. In the interest of greater clarity, which is always desired and welcomed by practical engineers and designers, *Grammel's* work will have to be reproduced here quite elaborately, before the necessary ultimate conclusions can be drawn from it. It should be mentioned in this connection that the theory developed in [2], [3] was the stimulating factor for further valuable studies by *F. K. G. Odqvist* [4], in which the general case is treated of a homogeneous circular ring under loads continuously, but in general non-uniformly, distributed along the circumference. It must be stated, however, that the studies carried out in [4], are only the beginning of a full discussion, and it is to be hoped that these studies will be continued and completed. Attention must be called furthermore to an analysis of the twist problem forming a part of the subject covered in [5]; the results derived in the present paper will make necessary some modifications in the analysis just referred to.

Fig. 2. Beam in Bending by End Couples.

We start with a derivation of the loading action diagram of the ring under a system of concentrated twisting moments equally spaced and of equal magnitude.

2. Derivation of the Loading Action Diagram. The equations, which determine the loading conditions of the elastic system under consideration, can be derived in various ways. The shortest and best derivation is given in [2], [3]. We shall follow it essentially in the present Section **2.**

Assume the ring to be acted upon by n ($n \geqq 2$) twisting moments equally spaced and of equal magnitude T (fig. 1); the spacing angle of the twists is $2F = 2\pi/n$.

It is already at this point important to recognize the general type of deformation, which the ring will undergo under the action of the n twists T_j ($j = 1$ to n). Unjustified analogy with the

* The present paper is dedicated by its author to the memory of his teacher Professor Dr. *Richard von Mises* (April 19, 1883 — July 14, 1953).

[1] Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

case of a straight beam in bending by end couples (see fig. 2) might mislead some reader to the idea that the displacement components of the ring under its loads, shown in fig. 1, in its original plane must be of a higher order of smallness than those in the direction normal to that plane. This would mean that in the case of sufficiently small deformations, to which, by the way, we confine ourselves in the following, the bending of the ring in its original plane is negligibly small as compared with the bending out of that plane. Such a conclusion would be, in general, erroneous and the analogy with the case of the beam (fig. 2) is faulty: in consequence of the flexibility of the ring in the radial direction as well the possibility of appearance, under certain circumstances, of radial displacements cannot be discarded. This will become evident in later parts of the present paper.

After this preparatory remark we return to our immediate objective of deriving the loading action diagram of the problem from our fig. 1.

Separating from the ring (fig. 1) the part NP, we have to apply to each of its ends N and P, in addition to the twisting moment $\frac{1}{2}T$, not only a bending moment B, but also, in accordance with the preceding remark, a bending moment B_0 (fig. 3). Using the right-hand screw rule in the presentation of moments by means of vectors, we easily verify the orientation

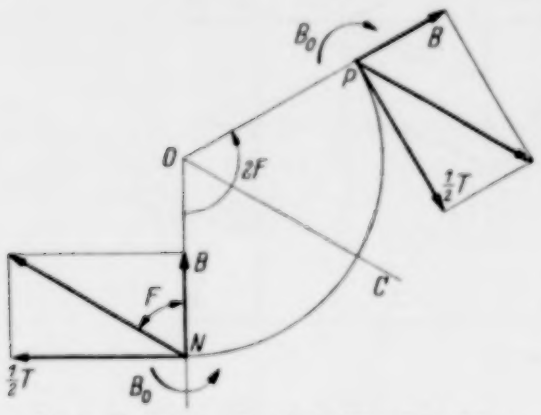

Fig. 3. Equilibrium Sketch for Ring Part NP.

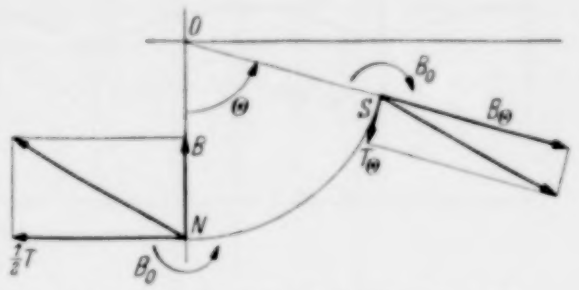

Fig. 4. Equilibrium Sketch for Ring Part NS.

of the vectors B as shown in fig. 3. Considering namely the resultant of $\frac{1}{2}T$ and B at each of the points N and P of the ring part NP we first see that these two resultants must be vectors of equal absolute amount and opposite direction; this leads to an inward vector B at the point N and an outward vector B at the point P. Now we secondly conclude that both resultants just mentioned must be parallel to the center line OC of the ring part NP (see fig. 3) by reasons of symmetry. This leads to the conclusion

$$B = \frac{1}{2}T \cot F. \tag{1}$$

The bending moments B and B_0 and the twisting moments $\frac{1}{2}T$, all shown in fig. 3, represent the system of loads, which determines the deformation and the stress distribution in the entire ring. This system of loads can be subdivided into two parts, the one consisting of the moments B_0 and the other of the moments $\frac{1}{2}T$ and B. The first part will be taken care of in later Sections of this paper; the second part, consisting of the moments $\frac{1}{2}T$ and B, is the subject of the immediately following considerations.

Separating from the part NP (fig. 3) a smaller part NS, corresponding to a central angle Θ (fig. 4), we state for the latter again the equilibrium conditions. They require to apply at the point S a twisting moment T_Θ and bending moments B_Θ und B_0. Since the resultant of B_Θ and T_Θ must equal that of the moments B and $\frac{1}{2}T$, appearing at the point P, we easily find from the vectordiagram at the point S the relations

$$B_\Theta = \frac{1}{2}T \frac{\cos(\Theta - F)}{\sin F}, \tag{2}$$

$$T_\Theta = \frac{1}{2}T \frac{\sin(\Theta - F)}{\sin F}. \tag{3}$$

These two formulas give us the distribution of the bending and the twisting moments, produced by, and representing the action of, the moments B and $\frac{1}{2}T$, applied at each of the ends N and P

of the ring part NP. This distribution of the moments (2) and (3) along the circumference of the center line (see below, Section 5) of the ring is visualized graphically in fig. 5; the constant bending moment B_0 of thus far unknown magnitude appears in fig. 6. The two figs. 5 and 6 represent the loading action diagram for the elastic system under consideration. From this diagram we will have to derive all the information necessary for the calculation of the stress distribution in the ring.

Excluding for the time being, as just stated, the bending moments B_0 from consideration, we can say that, as far as the remaining loading by the moments B and $\frac{1}{2}T$ is concerned, both the external and internal mechanical actions exerted on the ring are now fully described by fig. 5. In

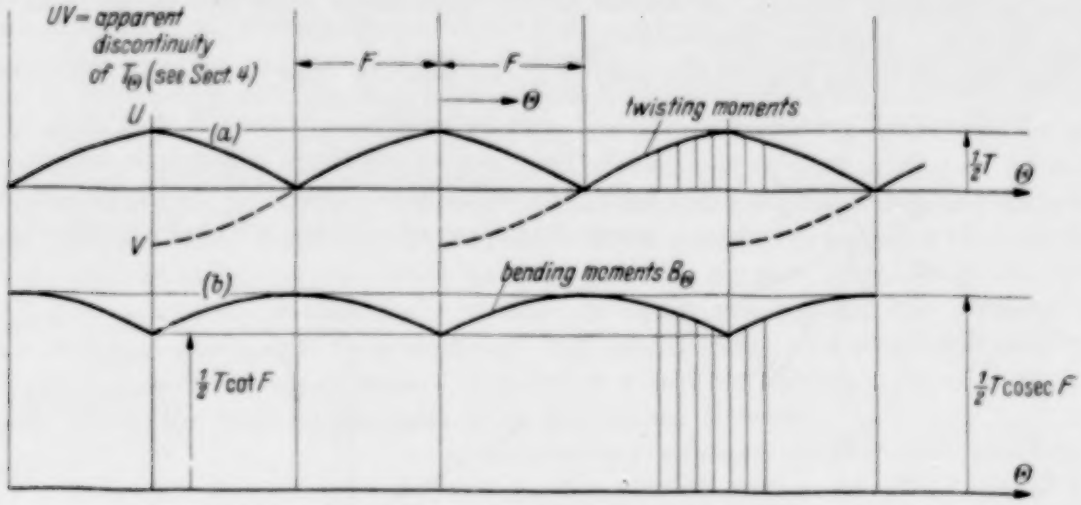

Fig. 5. Illustrating Formulas (2) and (3).

Fig. 6. Diagram of Bending Moment B_0.

analogous conditions conventional systems of the one-dimensional class would be easily accessible to a "restricted" ($B_0 = 0$) investigation of the stress distribution, but not so in our present problem, see Section 1. In a certain sense of the word, the real problem now only begins.

3. Examination of the Nature of the Elastic Problem of the Ring. Suppose the number n of the twisting moments is large. Then $F = \pi/n$ is a small angle, and $\sin F \approx F$, so that, according to (2) and (3),

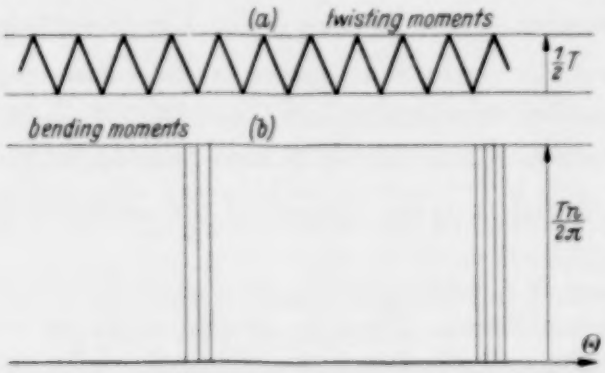

Fig. 7. Illustrating Formulas (4) and (5).

$$B_\Theta \approx \frac{T}{2F} = \frac{Tn}{2\pi} = \text{const}\,, \tag{4}$$

$$0 \leqq T_\Theta \leqq \frac{1}{2}T\,, \tag{5}$$

$$0 \leqq \Theta \leqq F = \frac{\pi}{n}\,. \tag{6}$$

The diagram, figs. 5a and 5b, assumes in this case the form shown in figs. 7a and 7b. These results shall be compared with those of p. 138 of [1].

The uniformly distributed twist, denoted there by M_t, is in our notation $Tn/2\pi R$, where R = radius of the ring. Thus equ. (a), p. 138 of [1], is, with M replaced by B_Θ,

$$B_\Theta = M_t R = \frac{Tn}{2\pi} \tag{7}$$

in agreement with our equ. (4). So we see that the presentation (2), (3) remains valid even for the limiting case of $n \to \infty$ treated in [1], as far as the calculation of the bending moments B_Θ from the applied twists is concerned. The torques — if any at all are produced by the concentrated twists — must obviously approach the limit zero with $n \to \infty$, as the comparison

with [1] shows. The comparison of the latter elementary case with the general form of the problem will be continued below.

With increasing n the general case, illustrated by fig. 1, evidently approaches continuously the special case just referred to, provided, of course, that the product $n\,T$ does not exceed certain limits. It is at this point important and interesting to have at least some idea about the rapidity of the transformation of the general to the special case in question. With reference to fig. 5 such an idea can be derived from a simple and useful formula for the ratio ϱ of the minimum value of the bending moment B_Θ to its maximum value. According to (2) we have

$$\varrho = \frac{\cos(\Theta - F)_{(\Theta=0)}}{\cos(\Theta - F)_{(\Theta=F)}} = \cos F = \cos\frac{\pi}{n}. \tag{8}$$

This ratio is represented graphically in the chart fig. 8, showing ϱ as a function of n. The rapidity of the rise of ϱ with increasing n is remarkable. From the diagram fig. 8 we see that starting, say, from $n=8$, the bending moment B_Θ of the ring is practically almost constant and equal to its

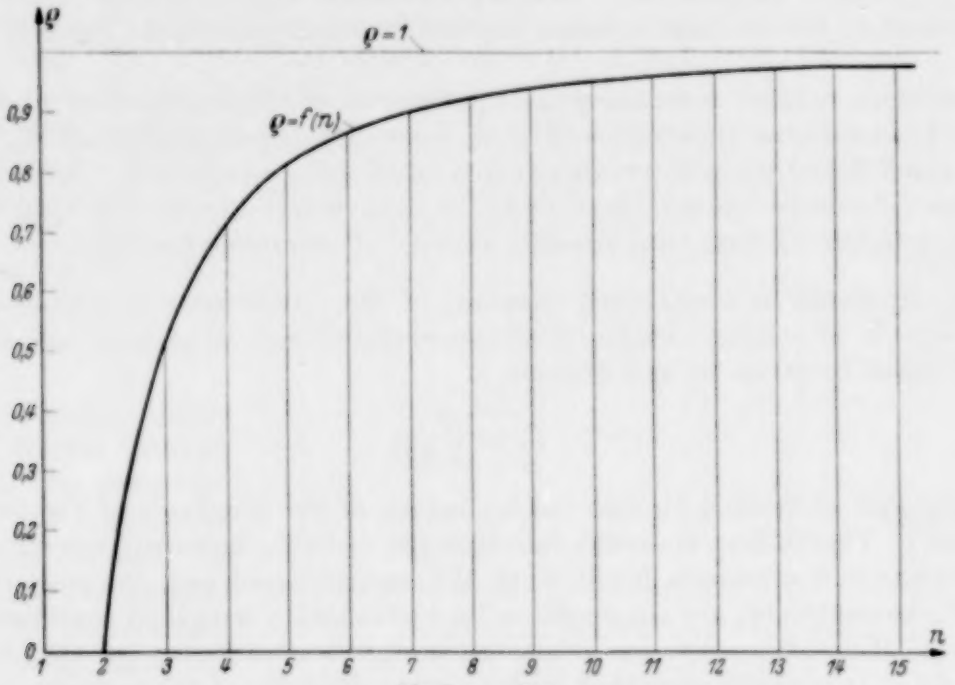

Fig. 8. $\varrho = f(n)$.

maximum value. This suggests the idea of the probability that starting approximately from $n=8$ the condition of the ring is already very near to that of a ring under uniformly distributed twist, characterized by the absence of torques. We shall see below that this absence of torques extends over a much wider range of the values of the number n.

A further perhaps still more emphatic illustration of the somewhat surprising negligibility of the torques acting in the ring is obtained from the following preliminary consideration. It is obvious that the function

$$\Phi = \Phi(\Theta) \tag{9}$$

where Φ denotes the twist angle of the ring, must be of the general type shown in fig. 9, in which $A_1, A_2, \ldots$ are the points of application of the twists $T_1, T_2, \ldots$ From this diagram we conclude immediately that the torques are zero exactly at the points of application of the twists (i. e. at the points, where the twists acting in the ring reach their maximum amount $\frac{1}{2}\,T$), because the torques are proportional to the derivative $d\Phi/d\Theta$ (see following Section 4), and this derivative is zero at the points of maximum twist.

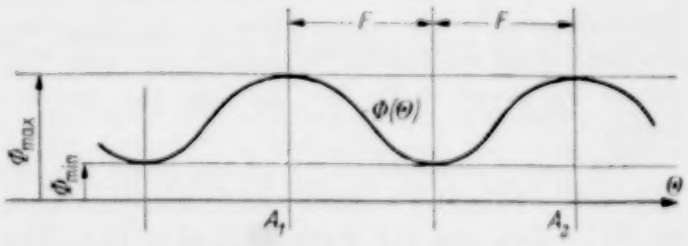

Fig. 9. Illustrating Type of Function (9).

On the basis of the preceding introductory considerations of this Section 3 we may state the characteristics of the intended analysis as follows:

The loading action diagram of our elastic problem is given by figs. 5 and 6 for T_Θ, B_Θ and B_0; with exception of B_0, which is an unknown constant, both the bending moment B_Θ and the

twisting moment T_Θ are known functions of the azimuth angle Θ; the torque, however, which produces and determines the torsional stresses in the ring, is an unknown function of Θ. The determination of this function is the important step implied in the concluding sentence of Section 2. To achieve this step we must know the function (9), the twist angle $\Phi(\Theta)$, shown qualitatively in fig. 9. In an attempt of determining this function we would have to start from an expression of the form

$$\Phi(\Theta) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cos j\pi \frac{\Theta}{F} \qquad (0 \leqq \Theta \leqq F) \tag{10}$$

where the $a_j (j = 0; 1; \ldots; N)$ are indeterminate constant coefficients. An approximate presentation of the function $\Phi(\Theta)$ can be obtained by means of the formula

$$\Phi(\Theta) = a_0 + a_1 \cos n\Theta \qquad \left(n = \frac{\pi}{F}\right) \qquad (0 \leqq \Theta \leqq F). \tag{11}$$

Since formula (11) fulfils already the boundary conditions $d\Phi/d\Theta = 0$ at $\Theta = 0$ and at $\Theta = F$, there is good reason to believe that it must lead to results of practically entirely satisfactory accuracy.

Thus our problem reduces essentially and mainly to the determination of the constants a_0 and a_1 in (11). To determine them, as well as the constant bending moment B_0, we will have to proceed in a manner based upon *Grammel*'s theory of the ring under twist (see Section 1). Before reproducing here *Grammel*'s theory (Section 5) we shall insert in the following Section 4 a few remarks for the purpose of removing possible sources of misunderstandings.

4. Remarks. It should be noted that, speaking of the substitution of a uniformly distributed twist T_0 for a system of a large number n of concentrated equally spaced and equal twists, the definition of T_0 must be given by the formula

$$T_0 = \frac{T n}{2\pi R} \tag{12}$$

(see second paragraph of Section 3), and not by means of the diagrams of the twisting moments in the figs. 5 and 7. This follows from the fact that the twisting moments shown in the latter two diagrams are produced moments, while both the concentrated and the uniformly distributed twists T and T_0, respectively, are supposed to be externally applied moments, of course.

Another source of possible confusion arises in the sign determination for the twisting moments (see figs. 4 and 5a). It is easily seen that in the vector diagram of the bending and twisting moments, constructed as shown in fig. 4, the twisting moment T_Θ undergoes a change of sign at the point $\Theta = F$, where $T_\Theta = 0$ (see fig. 5a); it leads to discontinuities, visualized in fig. 5 by the broken lines, of the function $T_\Theta(\Theta)$ at the points of application of the twists T. In other words, our full line diagram fig. 5a could be considered as being in some contradiction with the actual distribution of the (internal) twisting moments, a misunderstanding which is, however, easily and quickly removed as follows. The absence of sign changes in fig. 5a expresses only that along the circumference of the center line of the ring the moments T_Θ tend to twist the ring everywhere inward. This statement in connection with the indication of the magnitude of the twisting moments T_Θ, given in fig. 5a, defines the twists completely and removes any possibility of confusion.

The exact determination of the twist deformations is more complicated in the problem of the ring under twist by concentrated moments than in the case of a straight beam in torsion, see [3], pp. 222—224, and [4], form. (32) of p. 101. The first of the two sources just referred to indicates, on the basis of a study by *K. Marguerre* [6], that the necessary modification of the twist deformation formula is of the character of a correction; the magnitude of the error incurred by neglect of that correction is shown in fig. 16 as a function of the number n of twists. Since we are concerned here primarily with a particular fundamental aspect of the problem of the ring under twist by concentrated moments, namely with the question of the general way of computing the torques appearing in such a ring, we shall omit here any discussion of the modification just mentioned, using in the following the approximation by means of the corresponding straight beam formula.

Finally, we once more call attention to the important fact that the moments, shown in fig. 5a, represent the twists, acting on the ring, and not the torques, which we must know in order to determine the torsional stresses in the ring. To determine the torques, we must find the twist angle Φ as a function of the azimuth angle Θ. This is the characteristic difficulty of the problem.

5. Grammel's Theory of the Ring Under Twist. *Grammel's* study of the subject offers not only an instructive piece of analytical work, it presents a solid foundation for an effective quantitative discussion of the problem. More specifically, it provides us with all basic relations necessary for determination of the twist angle $\Phi(\Theta)$ along the circumference of the center line of the ring. This determination will prove to be, in a certain sense of the word, the decisive step in the process of applying *Grammel's* investigation to the solution of the ring problem. A detailed acquaintance with this investigation is therefore essential for a thorough understanding of the solution of the problem in all of its practically important aspects.

Referring to our fig. 10, virtually reproduced from p. 434 of [2], we note the following particular features of the treatment in the two sources referred to in the concluding paragraph of Section 3:

1. The position of the "neutral point" (called "center of rotation" in [1]) is the subject of a careful study. A detailed derivation shows that the neutral point nearly coincides with the centroid of the cross sectional area of the ring, if the cross sectional dimensions are not too large as compared with the diameter of the ring. The result just mentioned is developed explicitly for the case of the uniformly distributed twist, and the conclusion is then used for the case of n equally spaced concentrated twists of equal absolute magnitude as well. In going over that derivation carefully, we actually see that this question of the uniformity of twist distribution does not enter into it.

2. The cross sectional principal axes ξ, η of inertia through the centroid 0 of the cross sectional area enclose angles of amount t with the outward radial direction x and the upward axial direction y, respectively (see fig. 10). In many cases the angle t may be zero, but *Grammel's* analysis applies more generally to the case $t \neq 0$.

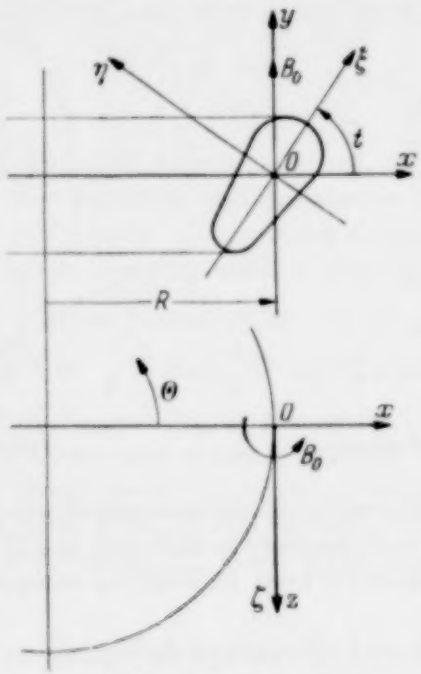

Fig. 10. Orientation of Angles and Axes According to [2].

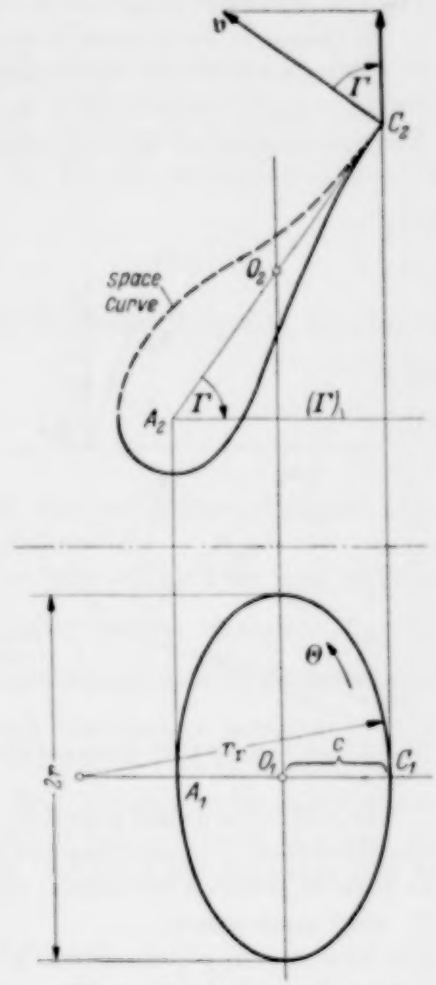

Fig. 11. Illustrating Definition of Curvature Vector $\mathfrak{v}$.

Under the action of the loading conditions, indicated in the diagram figs. 5 and 6, the centroid line of the ring will become a curve of double curvature. The curvature properties and characteristics of this curve must be given some special consideration.

Using the terminology of differential geometry, we know that at any point of a space curve there is an "osculating plane" to such a curve. A "line element", or infinitesimal arc of the curve at that arbitrarily chosen point, and the radius r of curvature of the line element, both lie in the osculating plane.

Now let us consider the following elementary accessory problem.

The curvature of a line element at a point C (C_1, C_2) of a space curve (see fig. 11), measured in the osculating plane $(A_2O_2C_2)$ of the curve at that point, is $1/r$, where $r =$ radius of the curvature circle $A_2O_2C_2$ of the curve at that line element. It is required to determine the curvature $1/r_\Gamma$ of the projection of the line element just mentioned on a plane (Γ) enclosing an angle Γ with the osculating plane.

We have represented the curvature circle AOC in fig. 11 by its projections $A_1O_1C_1$ (ellipse) and $A_2O_2C_2$ (straight line) in plan and elevation, respectively, with the plane through C and the curvature center 0, normal to the osculating plane [and thus to the plane (Γ) as well, see fig. 11], taken as the vertical projection plane, while the (Γ) plane becomes the horizontal projection plane.

Since the curvature circle of point $C(C_1, C_2)$ assumes the shape of an ellipse in the plan view, the curvature radius r_Γ of the line element at the point C_1 of the horizontal projection of our line element is, with $O_1C_1 = c$, obviously

$$r_\Gamma = \frac{r^2}{c} = \frac{r}{\cos \Gamma} \tag{13a}$$

so that

$$\frac{1}{r_\Gamma} = \frac{1}{r} \cos \Gamma . \tag{13b}$$

The last relation shows that the curvature $1/r$ of a curve in general can be treated as a vector $\mathfrak{v}$ (*Grammel* in [2], [3]) defined in the following manner:

The absolute magnitude of $\mathfrak{v}$ is the reciprocal of the radius r of curvature, while its direction is taken to be perpendicular to the osculating plane and combining, in line elements of outward convexity in the osculating plane, with the direction of the increase of the azimuth angle Θ to a right hand helical system.

This definition of the curvature vector $\mathfrak{v}$ is visualized in the elevation of fig. 11.

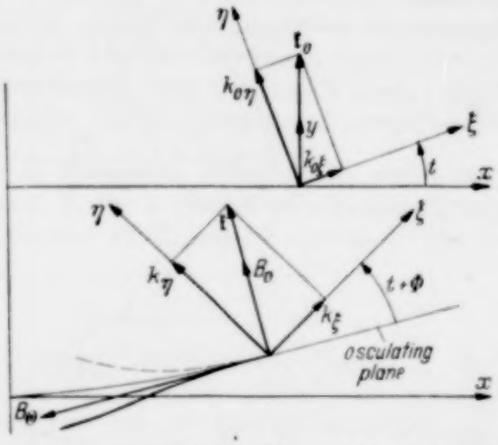

Fig. 12. Cross Sectional Plane Before and After Deformation.

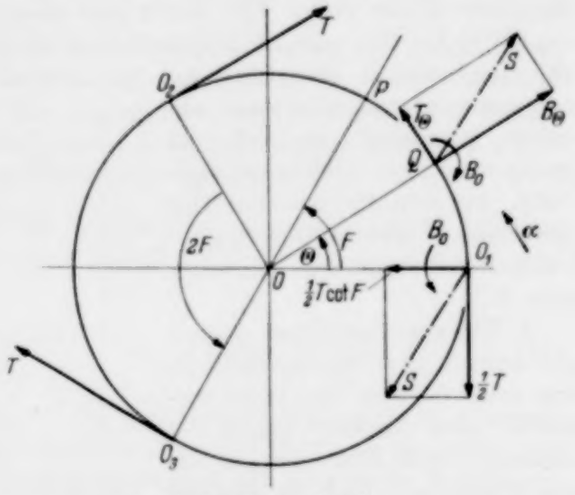

Fig. 13. Equilibrium Sketch.

In order to avoid possible confusion and misunderstandings we call attention to the fact that the direction of measuring the azimuth angle Θ is different in [2] and [3], which leads to differences in sign in derived formulas; this must be kept in mind in comparing the two sources just referred to with each other.

Now we apply *Grammel's* vectorial curvature definition to the space curve, into which the center line of the ring (fig. 10) is transformed under the action of the twists. More specifically, we are interested in the curvature properties of each of the two plane curves representing the projections of the space curve under consideration on the planes $\xi O\zeta$ and $\eta O\zeta$ (fig. 10).

According to our preceding detailed presentation the vector $\mathfrak{k}$ of our space curve determines, for each line element, the curvature of each of its two projections just referred to: with the convexity (or concavity) of the line element remaining unchanged in the projection (see definition of $\mathfrak{v}$), the curvature of the projection on the $\eta O\zeta$ plane is the component k_ξ of the vector $\mathfrak{k}$ in the ξ direction, the curvature of the projection on the $\xi O\zeta$ plane is the component k_η of the vector $\mathfrak{k}$ in the η direction.

Let us apply these statements to our ring of fig. 10, reproduced in fig. 12. The curvature of the originally plane circle is represented by the constant vector $\mathfrak{k}_0$ of the absolute amount $1/R$, while its direction is that of the y axis. The components of this original vector $\mathfrak{k}_0$ in the ξ and η directions, respectively, are, according to fig. 12

$$k_{0\xi} = \frac{1}{R} \sin t , \tag{14}$$

$$k_{0\eta} = \frac{1}{R} \cos t . \tag{15}$$

Considering the same originally plane circular center line of the ring after deformation, we find its curvature to be represented by a vector $\mathfrak{k}$, which is in general, of course, a function of the azimuth

angle Θ both with respect to absolute amount and to position in space. From the definition of the curvature vector (see above) it is easily seen that the principal axes $O\xi$ and $O\eta$ and the vector $\mathfrak{k}$ are all situated in one plane, namely in the cross sectional plane of the deformed ring at the line element considered (see fig. 12). The components of $\mathfrak{k}$ in the principal directions $O\xi$ and $O\eta$ shall be denoted by $k_\xi = k_\xi(\Theta)$ and $k_\eta = k_\eta(\Theta)$, respectively, so that the curvature changes of the plane projections of the line element of the space curve on the planes $\eta O\zeta$ and $\xi O\zeta$ are, with reference to (14) and (15), respectively,

$$\Delta k_\xi = k_\xi(\Theta) - \frac{1}{R}\sin t\,, \tag{16}$$

$$\Delta k_\eta = k_\eta(\Theta) - \frac{1}{R}\cos t\,. \tag{17}$$

It is necessary to keep in mind that the curvature changes (16), (17) must be defined relatively to the principal planes $\xi O\zeta$ and $\eta O\zeta$ disregarding the movement of these planes in the space, because the bending problem must be treated with respect to the principal axes of the cross section.

Introducing the modulus of elasticity E and, with reference to fig. 10, the moments of inertia

$$I_\xi = \int \eta^2\, dA\,, \tag{18}$$

$$I_\eta = \int \xi^2\, dA \tag{19}$$

where dA = element of the cross sectional area of the ring, we define the flexural rigidity constants

$$E\,I_\xi = C_1\,, \tag{20}$$

$$E\,I_\eta = C_2 \tag{21}$$

for the bending action in the $\eta O\zeta$ and $\xi O\zeta$ planes, respectively.

The next step is to establish the relations which exist between the curvature changes (16), (17) and the moments acting on the elastic system under consideration.

Refer to fig. 13, representing again our ring with a part O_1Q cut out of it. This part O_1Q is acted upon by the moments $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{2}T\cot F$ and B_0 at the point O_1 and by the moments T_Θ, B_Θ and B_0 at the point Q; the resultant of $\frac{1}{2}T$ and $\frac{1}{2}T\cot F$ is a vector equal and opposite to the vector, representing the resultant of T_Θ and B_Θ at the point Q; both vectors are parallel to OP, the angle O_1OP being equal to F. Draw now a plane through OQ normal to the osculating plane of Q; looking at that plane in the direction of the arrow α we find the part QO_2 to be acted upon, at the point Q, by the moments B_Θ and B_0 as shown in the lower part of fig. 12. Note that our B_0 is identical with *Grammel's* $-\mathfrak{M}_1$. From fig. 12, lower part, we find the total bending moment at the point Q to be

$$M_\xi = B_0 \sin(t+\Phi) - B_\Theta \cos(t+\Phi) \qquad \text{in the } \eta\,O\,\zeta \text{ plane,} \tag{22}$$

$$M_\eta = B_0 \cos(t+\Phi) + B_\Theta \sin(t+\Phi) \qquad \text{in the } \xi\,O\,\zeta \text{ plane.} \tag{23}$$

These bending moments are responsible for the curvature changes (16) and (17), respectively. Therefore, by virtue of (20) and (21) and with the usual sign conventions for the bending moments.

$$M_\xi = -C_1\,\Delta k_\xi\,, \tag{24}$$

$$M_\eta = -C_2\,\Delta k_\eta\,. \tag{25}$$

Substitution of (22), (23), (16), (17), (20), (21), into (24), (25) gives

$$-B_0 \sin(t+\Phi) + B_\Theta \cos(t+\Phi) = E\,I_\xi\,[k_\xi - (1/R)\sin t]\,, \tag{26}$$

$$-B_0 \cos(t+\Phi) - B_\Theta \sin(t+\Phi) = E\,I_\eta\,[k_\eta - (1/R)\cos t]\,. \tag{27}$$

Before proceeding further with the derivation of the necessary formulas, we reproduce here *Grammel's* simple and instructive check of the relations (26) and (27). *Grammel* calls attention to the fact that the latter two formulas take care of the two kinds of bending which take place in the ring, namely of the bending proper (bending caused by the actual shape of the deformed center line assumed to be produced by bending only without twist) plus bending produced by twist (like in the elementary case treated in [1]); these two kinds of bending can be termed „flexural bending" and "twist bending", respectively.

If the actual shape of the center line of the ring after deformation were free of twist, then the actual total angle $t + \Phi$ would have to replace the original angle t, as far as the computation of

the curvature changes (16) and (17) is concerned. The corresponding bending stresses ("flexural bending") are, as easily seen,

$$\sigma_\eta = -E\,\eta\,[k_\xi - R^{-1}\sin(t+\Phi)]\,, \tag{28}$$

$$\sigma_\xi = E\,\xi\,[k_\eta - R^{-1}\cos(t+\Phi)]\,. \tag{29}$$

To explain the signs in (28), (29) we refer to the lower part of fig. 12: if the curvature change (16) is positive, then filaments, characterized by positive values of η, undergo contraction; if the curvature change (17) is positive, then filaments, characterized by positive values of ξ, undergo extension. This takes care of the "flexural bending" stresses in the ring.

To obtain the expression for the "twist bending" stresses, we return to fig. 10, a part of which is reproduced in fig. 14. Referring to the notations of the latter, we see that a rotation of a cross section of the ring through the twist angle $\Phi(\Theta)$ produces a local extension of the radius of the filament through the point P by the amount

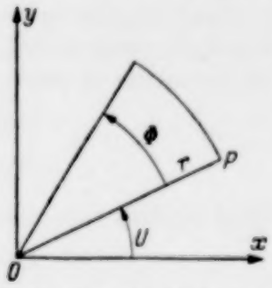

Fig. 14. Illustrating Derivation of (30).

$$r\,[\cos(U+\Phi) - \cos U] = -x\,(1-\cos\Phi) - y\sin\Phi\,. \tag{A}$$

In the case of a ring, whose cross sectional dimensions are small as compared with the radius R of the ring, the "twist bending" stress is on the basis of (A) given by

$$\sigma_\Theta = -\frac{E}{R}\,[x\,(1-\cos\Phi) + y\sin\Phi]\,. \tag{30}$$

From fig. 10 we have the relations

$$x = \xi\cos t - \eta\sin t\,, \tag{31}$$

$$y = \xi\sin t + \eta\cos t \tag{32}$$

which are to be substituted into (30). The sum σ of the three expressions (28), (29), (30) is a function of ξ and η. Consider now the integral $+\int\sigma\,\eta\,dA$, taken over the entire area A of the cross section of the ring. Since $\int\xi\,\eta\,dA$, taken over the entire area A, is zero, only the items (28) and (30) are to be taken into account, so that

$$+\int\sigma\,\eta\,dA = -E\,[k_\xi - R^{-1}\sin(t+\Phi)]\int\eta^2\,dA - \frac{E}{R}\int\eta\,\{(\xi\cos t - \eta\sin t)(1-\cos\Phi) + (\xi\sin t + \eta\cos t)\sin\Phi\}\,dA = -E\,I_\xi\left[k_\xi - \frac{1}{R}\sin t\right]. \tag{33}$$

Entirely analogously we find

$$-\int\sigma\,\xi\,dA = -E\,[k_\eta - R^{-1}\cos(t+\Phi)]\int\xi^2\,dA + \frac{E}{R}\int\xi\,\{(\xi\cos t - \eta\sin t)(1-\cos\Phi) + (\xi\sin t + \eta\cos t)\sin\Phi\}\,dA = -E\,I_\eta\left[k_\eta - \frac{1}{R}\cos t\right]. \tag{34}$$

In other words, the integrals representing the left hand members of (33) and (34), which are the integrals representing the bending moments in the $\eta O\zeta$ and in the $\xi O\zeta$ planes, respectively, are correspondingly equal to the right hand members of (26) and (27) with sign reversed, which is correct in view of the relations (24), (25). This completes *Grammel*'s check.

The curvature of the projection of the deformed center line of the ring on the coaxial circular cylindrical surface through the undeformed center line is

$$k_1 = k_\xi\cos(t+\Phi) - k_\eta\sin(t+\Phi) \tag{35}$$

and similarly the curvature of the projection of that deformed center line on the plane perpendicular to the axis of the cylinder just indicated is

$$k_2 = k_\xi\sin(t+\Phi) + k_\eta\cos(t+\Phi)\,. \tag{36}$$

Multiplying (26) by $C_2\cos(t+\Phi)$ and (27) by $C_1\sin(t+\Phi)$ and subtracting then the second result from the first we get equation (37). Multiplying (26) by $C_2\sin(t+\Phi)$ and (27) by $C_1\cos(t+\Phi)$ and adding the results, we obtain equation (38):

$$C_1\,C_2\,(k_1 + R^{-1}\sin\Phi) = \frac{1}{2}\,(C_1 - C_2)\,B_0\sin 2(t+\Phi) + B_\Theta\,[C_1\sin^2(t+\Phi) + C_2\cos^2(t+\Phi)]\,, \tag{37}$$

$$C_1\,C_2\,(k_2 - R^{-1}\cos\Phi) = -\frac{1}{2}\,(C_1 - C_2)\,B_\Theta\sin 2(t+\Phi) - B_0\,[C_2\sin^2(t+\Phi) + C_1\cos^2(t+\Phi)]\,. \tag{38}$$

Considering the projection of the deformed center line of the ring on the cylindrical surface, we denote by u the deflection of the projection positive in the $+y$ direction. Progressing along the part QO_2 in fig. 13 and remembering that by definition k_1 is positive outward, we have the relation

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} = R^2 k_1 . \tag{39}$$

Denoting furthermore by v the radial contraction of the projection on the original plane of the center line of the ring, we have the differential equation (see [7])

$$\frac{d^2v}{d\Theta^2} + v = R(k_2 - R^{-1}) . \tag{40}$$

Thus far we have followed closely *Grammel's* work. The set of equations reproduced in this Section from [2] is the foundation for the concluding steps, which will be carried out below.

6. Remark on the Integration of the Differential System of the Problem. The further treatment of our ring problem must be based upon the choice of an appropriate hypothetical expression for the twist angle Φ as a function of the azimuth Θ. This has been emphatically anticipated already in Section **3**. We shall use in the following the hypothetical formula (11) with a_0 and a_1 as indeterminate constants. This formula (11) is to be combined with the equations (37), (38), (39), (40) representing a system of four equations for the four unknown functions

$$k_1, k_2, u, v \tag{41}$$

of the azimuth Θ. The integration of this system of equations must lead to a solution appearing in the form of a system of functions of the argument Θ and of the indeterminate constants B_0, a_0, a_1 and the constants of integration. The constants will have to be determined from the boundary conditions in connection with the condition of minimum strain energy [8]. The entire work thus sketched will be carried out in the following for the case of small twist angles Φ, for which Φ can be substituted for $\sin\Phi$ and 1 for $\cos\Phi$.

7. The Solution. Returning to the equations (37), (38), we treat the case

$$C_1 \neq C_2 \quad \Phi \text{ small} \quad t \gg \Phi \quad \text{so that} \quad t + \Phi \approx t . \tag{42}$$

This case shall be discussed here in a manner very similar to that used in [2], pp. 436—437. Thus we introduce the constants

$$\frac{1}{2}(C_1 - C_2)\sin 2t = K , \quad C_1 \sin^2 t + C_2 \cos^2 t = L , \quad C_2 \sin^2 t + C_1 \cos^2 t = N . \tag{43}$$

With these notations the equations (37), (38) can be approximated by

$$C_1 C_2\left(k_1 + \frac{\Phi}{R}\right) = K B_0 + L B_\Theta , \qquad -C_1 C_2\left(k_2 - \frac{1}{R}\right) = K B_\Theta + N B_0 \tag{44}$$

and this is by virtue of (2) and (11)

$$C_1 C_2\left[k_1 + \frac{1}{R}(a_0 + a_1 \cos n\Theta)\right] = K B_0 + L T \frac{\cos(\Theta - F)}{2 \sin F} , \tag{45}$$

$$-C_1 C_2\left(k_2 - \frac{1}{R}\right) = N B_0 + K T \frac{\cos(\Theta - F)}{2 \sin F} . \tag{46}$$

Substitution of (39) and (40) gives

$$u'' = \frac{R^2}{C_1 C_2}\left[K B_0 + L T \frac{\cos(\Theta - F)}{2 \sin F}\right] - R(a_0 + a_1 \cos n\Theta) , \tag{47}$$

$$v'' + v = -\frac{R^2}{C_1 C_2}\left[N B_0 + K T \frac{\cos(\Theta - F)}{2 \sin F}\right] \tag{48}$$

where a prime denotes differentiation with respect to Θ. The general integrals of (47) and (48) are

$$u = c_1 + c_2\Theta + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2 K B_0}{C_1 C_2} - R a_0\right)\Theta^2 - \frac{R^2 L T}{2 C_1 C_2 \sin F}\cos(\Theta - F) + \frac{R a_1}{n^2}\cos n\Theta , \tag{49}$$

$$v = c_3 \cos\Theta + c_4 \sin\Theta - \frac{R^2 N B_0}{C_1 C_2} - \frac{K T R^2}{4 C_1 C_2 \sin F}[\Theta \sin(\Theta - F) + \cos(\Theta - F) - \cos F \cos\Theta] , \tag{50}$$

where c_1 to c_4 are constants of integration. For reasons of symmetry we must have

$$du/d\Theta = 0 \qquad dv/d\Theta = 0 \qquad \text{when } \Theta = 0 \qquad \text{and when } \Theta = F\,. \tag{51}$$

Therefore, according to (49) and (50)

$$c_2 = R^2\,LT/2\,C_1\,C_2 \tag{52}$$

$$(C_1\,C_2/R)\,a_0 - K\,B_0 = L\,T/2\,F \tag{53}$$

$$c_3 = -\,(K\,T\,R^2/8\,C_1\,C_2\sin^2 F)\,(2\,F + \sin 2\,F) \tag{54}$$

$$c_4 = 0 \tag{55}$$

while the constant c_1 is determined by the choice of the reference line for the deflections u.

The strain energy of the ring part between $\Theta = 0$ and $\Theta = F$ is given by the expression

$$\frac{R}{2}\int_0^F\left(\frac{M_\tau^2}{C_0} + \frac{M_\xi^2}{C_1} + \frac{M_\eta^2}{C_2}\right)d\Theta\,, \tag{56}$$

where M_ξ and M_η are defined by (22) and (23), respectively, with $t + \Phi$ replaced by t, because of (42), while M_τ, representing the torque in the ring, is determined by (11) as follows. Denoting by G the modulus of rigidity of the ring material and by I_p the polar moment of inertia of the cross section of the ring, and putting

$$G\,I_p = C_0 \text{ (torsional rigidity)} \tag{57}$$

we have the formula

$$M_\tau = C_0\,(d\Phi/R\,d\Theta) = -\,(n\,C_0/R)\,a_1 \sin n\,\Theta\,. \tag{58}$$

The strain energy (56) must undergo the process of minimization with respect to the constants a_0 and a_1 occurring in (11). The indeterminate constants appearing in (56) are a_1, occurring in M_τ, equ. (58), and B_0, occurring in M_ξ and M_η, equ. (22) and (23). By virtue of (53) we have, however,

$$\partial/\partial a_0 = (C_1\,C_2/K\,R)\,(\partial/\partial B_0)\,. \tag{59}$$

Thus the process of minimization produces the two equations

$$\int_0^F M\tau\,(\partial M_\tau/\partial a_1)d\Theta = (n\,C_0/R)^2\,a_1\int_0^F \sin^2 n\,\Theta\,d\Theta = 0 \tag{60}$$

$$\text{leading to } a_1 = 0 \tag{61}$$

and

$$\int_0^F [C_1^{-1}\,M_\xi\,(\partial M_\xi/\partial B_0) + C_2^{-1}\,M_\eta\,(\partial M_\eta/\partial B_0)]\,d\Theta$$
$$= \int_0^F [C_1^{-1}\,(B_0\sin t - B_\Theta\cos t)\sin t + C_2^{-1}\,(B_0\cos t + B_\Theta\sin t)\cos t]\,d\Theta = 0\,. \tag{62}$$

By virtue of (2) the last equation becomes

$$F\,B_0\,(C_1^{-1}\sin^2 t + C_2^{-1}\cos^2 t) = (C_1^{-1} - C_2^{-1})\,\frac{1}{2}\,T\sin t\cos t \tag{63}$$

from which finally

$$B_0 = \frac{(C_1^{-1} - C_2^{-1})\,T\sin t\cos t}{2\,F\,(C_1^{-1}\sin^2 t + C_2^{-1}\cos^2 t)}\,. \tag{64}$$

Substituting (64) into (53) we find a_0, so that all of the three indeterminate constants become known; this determines the displacement components (49) and (50), the curvature components k_1 and k_2, defined by (37) and (38), respectively, and the moments M_ξ, M_η, M_τ, defined by (22), (23), (58), respectively.

We conclude the above considerations by a brief discussion of the results just obtained.

8. Discussion of the Results. Perhaps the most important result is expressed by equ. (61): under the assumptions, which represent the basis for our considerations, namely the assumptions of small initial curvature and small deformations, especially small twist angles, and with the reservation expressed in the semifinal paragraph of Section **4**, the twist angle Φ is, according to (11) and (61), a constant, namely a_0, independently of the number n of twists; the torque in the ring is, therefore, zero according to equ. (58).

Turning to equ. (64) we substitute $F = \pi/n$ into it; if we then assume Tn to remain constant, then B_0 remains constant as well, provided that C_1, C_2 and $t \geqslant \Phi$ do not change either. Furthermore we note, with reference to the third paragraph of Section **2**, that the condition for the disappearance of the bending moment B_0 is $C_1 = C_2 = C$; this, however, automatically involves an angle t of arbitrary magnitude (since any pair of mutually orthogonal axes can be used then as the pair of the principal axes; see also below), so that in particular we may assume $t = 0$ in the case just stated. This case of $C_1 = C_2 = C$ will be considered here somewhat more in detail.

If $C_1 = C_2 = C$, then, according to (43) and (53) to (55),

$$K = 0\,, \quad L = N = C\,, \quad c_2 = \frac{R^2 T}{2C}\,, \quad a_0 = \frac{RT}{2FC}\,, \quad c_3 = 0\,, \quad c_4 = 0\,. \tag{65}$$

Substitution into (49) and (50) gives then, with $B_0 = 0$ and $c_0 = (2C/R^2 T)\, c_1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{2C}{R^2 T}\, u &= c_0 + \Theta - \frac{n}{2\pi}\,\Theta^2 - \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}\cos\left[\Theta - \frac{\pi}{n}\right], \\ v &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Equ. (45) and (46) give now, on the basis of the first, the second and the fourth of the equ. (65),

$$k_1 = \frac{T}{2FC}\left[\frac{F}{\sin F}\cos(\Theta - F) - 1\right]; \quad k_2 = \frac{1}{R}\,. \tag{67}$$

It is easily seen that, as soon as F becomes small of the first order, k_1 becomes small of the second order, as it should be.

Since $\Phi = \text{const} = a_0$, where a_0 is given by the fourth of the equations (65), independently of the number n of twists, the twist angle Φ must be the same as in the elementary case treated in [1], a conclusion which affords a valuable check of our calculations. Substituting $F = \pi/n$ into the formula for a_0 and using our formula (12), we find

$$\Phi = a_0 = \frac{RTn}{2C\pi} = \frac{R^2 T_0}{C} \tag{68}$$

in complete agreement with form. (126), p. 139 of [1]. The remaining question is this: while our formula (68) is derived on the basis of the assumption that $C_1 = C_2 = C$, such an assumption is not used in [1], a fact which might suggest that the identity of the two cases, just compared with each other, is somewhat questionable. The situation will be clarified presently.

Let us return to the analytical formulation of our problem by means of the system (11) and (37) to (40). We consider two special cases, namely

(I) $C_1 = C_2 = C$, t arbitrary, so that we may assume $t = 0$,
(II) $C_1 \neq C_2$, $t = 0$

while Φ is assumed to be small in each of the two cases, like in all of our preceding considerations.

While the special case (I) is covered by the solution given in Section **7**, the special case (II) has not been treated yet.

In the special case (II) the system (11), (37)—(40) obviously transforms into

$$\Phi = a_0 + a_1 \cos n\,\Theta\,, \qquad C_1\left(k_1 + \frac{\Phi}{R}\right) = B_\Theta\,, \tag{69}$$

$$C_2\left(k_2 - \frac{1}{R}\right) = -B_0\,, \tag{70}$$

$$u'' = R^2 k_1\,, \tag{71}$$

$$v'' + v = R^2\left(k_2 - \frac{1}{R}\right). \tag{72}$$

In the special case (I) we obtain the same system of equations with the only difference that now $C_1 = C_2 = C$.

From (70) and (72) we get, with c_j = constants of integration,

$$v'' + v = -\frac{R^2}{C_2}\, B_0\,, \qquad v = c_5 \sin\Theta + c_6 \cos\Theta - \frac{R^2}{C_2}\, B_0\,, \tag{73}$$

$$v' = c_5 \cos\Theta - c_6 \sin\Theta\,. \tag{74}$$

The symmetry conditions $v' = 0$ when $\Theta = 0$ and when $\Theta = F$ lead here to

$$c_5 = c_6 = 0 \tag{75}$$

and

$$v = -\frac{R^2}{C_2} B_0 . \tag{76}$$

Note that the result applies to the special case (II), in which $C_1 \neq C_2$, $t = 0$; this special case includes, however, the possibility $C_1 = C_2 = C$, $t = 0$, as well, which is the special case (I), and we have incorporated this latter special case into the general case treated in Section **7**, see above. Therefore (75), (76) lead to the conclusions [cf. equ. (65) to (67)]

$$B_0 = 0 , \qquad v = 0 , \qquad k_2 = 1/R . \tag{77}$$

The equations (69) and (71) are to be treated in an entirely analogous manner. We give here only the results, leaving a detailed derivation to the interested reader:

$$u = -\frac{R^2 T}{2 C_1} \frac{\cos(\Theta - F)}{\sin F} - \frac{R^2 T}{4 C_1 F} \Theta^2 + \frac{R a_1}{n^2} \cos n\Theta + \frac{R^2 T}{2 C_1} \Theta + c^\circ , \tag{78}$$

$$a_0 = \frac{R T}{2 C_1 F} . \tag{79}$$

Comparing now the fourth of the equ. (65) and equ. (79) with form. (126), p. 139 of [1], referred to in the two paragraphs following our equ. (67) and (68), we actually see that the identity indicated there is genuine; the elementary case treated in [1] applies to the case $t = 0$, and its form. (126) is actually identical with our form. (79). This completes the check indicated above.

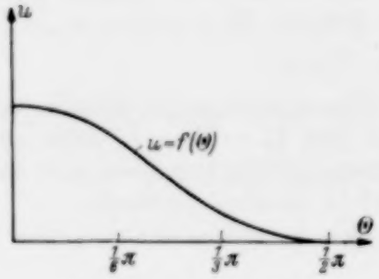

Fig. 15. $u = f(\Theta)$ for $n = 2$.

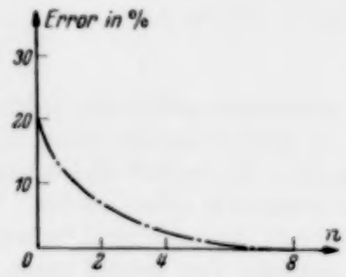

Fig. 16. Illustrating Error in Twist Deformation Formula.

Since our equ. (58), (60), (61) remain valid in the case considered here, the torque in the ring is again zero in the special case (II) as well, and furthermore equ. (78) becomes essentially identical with the first of our equ. (66), with the only difference caused by the constants C_1 and C. This takes care completely of the special case (II) as well.

As an illustration we give in fig. 15 a diagram of the function $(66)_1$ for the case of $n = 2$, for which that function assumes the form

$$\frac{2C}{R^2 T} u = c_0 + \Theta - \sin\Theta - \frac{\Theta^2}{\pi} . \tag{80}$$

9. Conclusions. With the reservation and assumptions stated at the beginning of the preceding Section **8** the results derived in the present paper can be briefly formulated as follows:

A homogeneous circular ring acted upon by equally spaced concentrated twists of equal magnitude is always free of torques. The bending moment B_0, represented by a vector normal to the original plane of the ring, vanishes, if one of the two cross sectional principal axes is situated in the plane just mentioned; the case that the two principal moments of inertia of the cross sectional area of the ring are equal to each other is a special case of the one just taken care of. If the angle t is essentially different from zero [cf. definition of case (I) in Section **8**], which means that C_1 and C_2 are actually different from each other, then the bending moment B_0 is different from zero and given by our formula (64). This is basically the solution of our problem of a circular ring under concentrated twists, because the effects of the bending moments B_Θ, see formula (2), can be studied by means of elementary methods.

Bibliography

[1] *S. Timoshenko*, Strength of Materials, Vol. II, pp. 138—141, 3rd. ed., New York 1956.
[2] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) p. 429.
[3] *C. B. Biezeno* and *R. Grammel*, Engineering Dynamics, Vol. II, pp. 213—224, London and Glasgow 1956 (translated from the 2nd German ed. 1953).
[4] *F. K. G. Odqvist*, Ing.-Arch. 22 (1954) p. 98. A continuation of *Odqvist's* work will be found in a paper by *A. Bjoerklund*, Ing.-Arch. 23 (1955) p. 421.
[5] *E. R. Walters*, J. Aeronaut. Sciences, New York (1945) p. 235.
[6] *K. Marguerre*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) p. 223.
[7] *S. Timoshenko*, l. c. Vol. I, p. 401—404.
[8] *S. Timoshenko* and *J. N. Goodier*, Theory of Elasticity, p. 146 ff, especially p. 155, 2nd ed. New York 1951

(Eingegangen am 7. September 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *I. Malkin*, New York 25, N. Y., 808 West End Avenue Apt 11—C.

Torsionsschwingungen von Scheiben mit Exponentialprofil

Von S. Tameroğlu

1. Einleitung. Die Gleichungen der Torsions- und Dehnungsschwingungen ohne Knotendurchmesser von Scheiben mit beliebigem Profil lauten bekanntlich wie folgt[1]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{3}{r}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial r}-\frac{\gamma}{g\,G}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}+2\,\omega\,\frac{\partial\varrho}{\partial t}\frac{1}{r}\right)=0\,,\\ &\frac{\partial^2\varrho}{\partial r^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial r}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{m\,r\,y}-\frac{1}{r^2}\right)\varrho-\frac{\gamma\,(m^2-1)}{g\,m^2\,E}\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}-2\,\omega\,r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)=0\,; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dabei sind r und φ die Polarkoordinaten der Scheibe ($r_2 \leqq r \leqq r_a$) vom Profil $y(r)$; ferner bedeutet $\vartheta(r,t)$ den Zentriwinkel des Schwingungsanteils der azimutalen Verschiebung, $\varrho(r,t)$ den Schwingungsanteil der radialen Verschiebung, γ das spezifische Gewicht der Scheibe, g die Erdbeschleunigung, G den Schubmodul, m die Querdehnungszahl, E den Elastizitätsmodul und ω die Drehgeschwindigkeit der Scheibe.

Diese Gleichungen lassen insbesondere stehende Eigenschwingungen von der Frequenz $\varkappa$ gemäß dem Ansatz

$$\vartheta=\Psi(r)\sin 2\pi\varkappa t\,,\qquad \varrho=R(r)\cos 2\pi\varkappa t \tag{2}$$

zu, deren Amplituden Ψ und R Funktionen von r allein sind und nach (1) den Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dr^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{3}{r}\right)\frac{d\psi}{dr}+\lambda^2\Psi+\frac{\omega}{\pi\,\varkappa}\lambda^2\frac{R}{r}=0\,,\\ &\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)\frac{dR}{dr}+\left(\mu^2+\frac{dy}{dr}\frac{1}{m\,r\,y}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\omega}{\pi\,\varkappa}\mu^2\,r\,\Psi=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit den Abkürzungen

$$\lambda=2\pi\varkappa\sqrt{\frac{\gamma}{g\,G}}\,,\qquad \mu=2\pi\varkappa\sqrt{\frac{\gamma\,(m^2-1)}{g\,m^2\,E}}$$

genügen müssen. Bei rotierenden Scheiben besteht für torsionale Störungen in erster Linie mit den Torsionseigenschwingungen Resonanzgefahr, in geringerem Maße aber auch mit den Dehnungsschwingungen; jedoch darf man die für die Resonanzgefahr maßgebenden Eigenfrequenzen $\varkappa$ bei beiden Schwingungen ausreichend genau an der nichtrotierenden Scheibe, d. h. für $\omega=0$ ermitteln[2]. Damit kommt statt der Gleichungen (3) einfacher

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{3}{r}\right)\frac{dy}{dr}+\lambda^2\Psi=0\,, \tag{4}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)\frac{dR}{dr}+\left(\mu^2+\frac{dy}{dr}\frac{1}{m\,r\,y}-\frac{1}{r^2}\right)R=0\,. \tag{5}$$

Diese Gleichungen sind für $\omega=0$ nicht mehr gekoppelt und können jede für sich gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit soll nun zunächst die Gleichung (4) für Exponentialprofile von der Gestalt

$$y=a\,e^{-(r/c)^p} \tag{6}$$

behandelt werden, wobei a, c und p reelle Zahlen bedeuten.

2. Differentialgleichung. Aus (6) berechnen wir

$$\frac{dy}{dr}\frac{1}{y}=-p\left(\frac{r}{c}\right)^p\frac{1}{r} \tag{7}$$

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, 2. Aufl. S. 33, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, a. a. O. S. 35.

und erhalten damit statt (4) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left[\frac{3 - p\left(\frac{r}{c}\right)^p}{r}\right]\frac{d\psi}{dr} + \lambda^2\psi = 0\,. \tag{8}$$

Führen wir durch

$$\xi = \frac{r}{c}\,, \qquad \eta = \frac{\psi}{\psi_a} \qquad \text{mit} \qquad \psi_a = \psi(r_a) \qquad \text{und} \qquad u^2 = \lambda^2 c^2 = 4\pi^2 \varkappa^2 \frac{\gamma c^2}{g G} \tag{9}$$

dimensionslose Größen ein, so kommt statt (7)

$$\eta'' + \frac{3 - p\,\xi^p}{\xi}\eta' + u^2\eta = 0\,, \tag{10}$$

wenn wir weiterhin die Ableitungen nach ξ durch Striche bezeichnen.

Sofern wir für den Exponenten p in (6) nur natürliche Zahlen $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$ zulassen, kann man partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (10) auf folgende Weise finden. Wir nehmen an, daß sich diese partikulären Lösungen $\eta_{p1}(\xi)$ nach Potenzen von ξ entwickeln lassen:

$$\eta_{p1}(\xi) = 1 + a_{p2}\,\xi^2 + a_{p3}\,\xi^3 + a_{p4}\,\xi^4 + a_{p5}\,\xi^5 + \cdots. \tag{11}$$

Dabei haben wir wegen der Linearität von Gleichung (10) $a_{p0} = 1$ gesetzt; ferner ist $a_{p1} = 0$, da nach (10) für eine reguläre Lösung $\eta'(0)$ verschwindet. Die Koeffizienten $a_{p2}, a_{p3}, \ldots$ bestimmen sich rekursiv aus (10). Um anzudeuten, daß sie noch Funktionen von p und u^2 sein werden, schreiben wir statt (11) prägnanter

$$\eta_{p1}(\xi) = 1 + f_{p2}(u^2, p)\,\xi^2 + f_{p3}(u^2, p)\,\xi^3 + f_{p4}(u^2, p)\,\xi^4 + \cdots. \tag{12}$$

Um weiter aus den partikulären Lösungen $\eta_{p1}(\xi)$ die allgemeinen Lösungen $\eta_p(\xi)$ zu finden, gehen wir von der Darstellung

$$\eta_p = v(\xi)\,\eta_{p1}(\xi) \tag{13}$$

aus. In Gleichung (10) eingesetzt, kommt

$$v''\,\eta_{p1} + 2\,v'\,\eta'_{p1} + v\,\eta''_{p1} + \frac{3 - p\,\xi^p}{\xi}(v'\,\eta_{p1} + v\,\eta'_{p1}) + u^2 v\,\eta_{p1} = 0 \tag{14}$$

oder, da η_{p1} der Gleichung (10) für sich schon genügt,

$$v''\,\eta_{p1} + v'\left(2\,\eta'_{p1} + \frac{3 - p\,\xi^p}{\xi}\eta_{p1}\right) = 0\,. \tag{15}$$

Dies ist für

$$q = v' \tag{16}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$q'\,\eta_{p1} + q\left(2\,\eta'_{p1} + \frac{3 - p\,\xi^p}{\xi}\eta_{p1}\right) = 0$$

mit dem allgemeinen Integral

$$q = v' = \frac{H\,e^{\xi^p}}{\xi^3\,\eta_{p1}^2} \tag{17}$$

und der Integrationskonstanten H.

Eine weitere Quadratur ergibt mit der zweiten Integrationskonstanten Q

$$v = Q + H\int_a^\xi \frac{e^{\xi^p}}{\xi^3\,\eta_{p1}^2}\,d\xi\,. \tag{18}$$

und die allgemeine Lösung von (10) ist damit in der Form

$$\eta_p = Q\,\eta_{p1} + H\,\eta_{p1}\int_a^\xi \frac{e^{\xi^p}}{\xi^3\,\eta_{p1}^2}\,d\xi \tag{19}$$

gefunden.

Um das Integral in (19) auszuwerten, entwickeln wir

$$\frac{e^{\xi p}}{\eta_{p1}^2} = 1 + b_{p1}\,\xi + b_{p2}\,\xi^2 + b_{p3}\,\xi^3 + b_{p4}\,\xi^4 + \cdots . \tag{20}$$

Damit kommt aus (19) mit der weiteren Konstanten U

$$\eta_p = Q\,\eta_{p1} + H\,\eta_{p1}\left(-\frac{1}{2\,\xi^2} - \frac{b_{p1}}{\xi} + b_{p2}\ln\xi + b_{p3}\,\xi + b_{p4}\frac{\xi^2}{2} + b_{p5}\frac{\xi^3}{3} + \cdots + U\right) \tag{21}$$

oder mit

$$D \equiv Q + H\,U \tag{22}$$

$$\eta_p = D\,\eta_{p1} + H\,\eta_{p1}\left(-\frac{1}{2\,\xi^2} - \frac{b_{p1}}{\xi} + b_{p2}\ln\xi + b_{p3}\,\xi + \frac{1}{2}\,b_{p4}\,\xi^2 + \cdots\right). \tag{23}$$

Wir haben somit das allgemeine Integral von (10) mit zwei willkürlichen Integrationskonstanten D und H als Kombination des regulären partikulären Integrals η_{p1} mit einem zweiten partikulären Integral dargestellt. Die hier auftretenden Entwicklungskoeffizienten b_{p1}, b_{p2}, b_{p3} ... sind durch (20) eindeutig bestimmt. Man ermittelt sie aber bequemer, indem man mit (23) in die Differentialgleichung (10) eingeht. Man sieht dann, daß auch diese Koeffizienten noch von p und u^2 abhängen: daher schreiben wir statt (23)

$$\eta_p = \eta_{p1}\,(D + H\,\zeta_{p4}) \qquad (p = 1, 2, 3, 4, \ldots) \tag{24}$$

mit der Abkürzung

$$\zeta_{p2}(u^2, p) \equiv -\frac{1}{2\,\xi^2} - \frac{F_{p1}(u,p)}{\xi} + F_{p2}(u^2, p)\ln\xi + F_{p3}(u^2, p)\,\xi + \frac{1}{2}\,F_{p4}(u^2, p)\,\xi^2 + \cdots . \tag{25}$$

In dieser Form stellt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10) für bestimmte Werte p und u^2 dar.

3. Randbedingungen. Die allgemeinen Randbedingungen für Torsionsschwingungen lauten für federnde Einspannung am Innenrand $r = r_i$ und am Außenrand $r = r_a$

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_i} = B_i\,\Psi(r_i)\,, \tag{26}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_a} = B_a\,\Psi(r_a)\,. \tag{27}$$

Hier sind die B_i und B_a jeweils gegebene oder leicht berechenbare Festwerte. Auf die dimensionslosen Größen (9) umgerechnet, hat man statt (26) und (27)

$$\left.\begin{aligned} \eta_p'(\xi_i) &= c\,B_i\,\eta_p(\xi_i)\,, \\ \eta_p'(\xi_a) &= c\,B_a\,\eta_p(\xi_a)\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Beziehen wir noch den einen Parameter c des Scheibenprofils (6) und den Innenhalbmesser r_i gemäß

$$c = \varkappa_1\,r_a \qquad r_i = \varkappa_2\,r_a \tag{29}$$

auf den Außenhalbmesser r_a, so wird

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= \frac{r_i}{\varkappa_1\,r_a} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\,, \\ \xi_a &= \frac{r_a}{\varkappa_1\,r_a} = \frac{1}{\varkappa_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

und die Randbedingungen (28) lauten mit (24)

$$\left.\begin{aligned} \eta_{p1}'\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\left[D + H\,\zeta_{p2}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\right] + H\,\eta_{p1}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\zeta_{p2}'\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) &= c\,B_i\,\eta_{p1}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\left[D + H\,\zeta_{p2}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\right], \\ \eta_{p1}'\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)\left[D + H\,\zeta_{p2}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)\right] + H\,\eta_{p1}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)\zeta_{p2}'\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right) &= c\,B_a\,\eta_{p1}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)\left[D + H\,\zeta_{p2}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

oder geordnet

$$\left.\begin{aligned} H\left[(\eta_{p1}\,\zeta_{p2})' - c\,B_i\,(\eta_{p1}\,\zeta_{p2})\right]_{\xi=\varkappa_2/\varkappa_1} + D\left[(\eta_{p1}') - c\,B_i\,(\eta_{p1})\right]_{\xi=\varkappa_2/\varkappa_1} &= 0\,, \\ H\left[(\eta_{p1}\,\zeta_{p2})' - c\,B_a(\eta_{p1}\,\zeta_{p2})\right]_{\xi=1/\varkappa_1} + D\left[(\eta_{p1}') - c\,B_a(\eta_{p1})\right]_{\xi=1/\varkappa_1} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Damit dieses in H und D lineare, homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung hat, muß seine Determinante verschwinden. Wir haben somit die Frequenz- oder Eigenwertgleichung für u^2, p

$$\begin{vmatrix} [(\eta_{p1}\zeta_{p2})' - c\,B_i(\eta_{p1}\zeta_{p2})]_{\xi=\varkappa_2/\varkappa_1} & [\eta'_{p1} - c\,B_i\eta_{p1}]_{\xi=\varkappa_2/\varkappa_1} \\ [(\eta_{p1}\zeta_{p2})' - c\,B_a(\eta_{p1}\zeta_{p2})]_{\xi=1/\varkappa_1} & [\eta'_{p1} - c\,B_a\eta_{p1}]_{\xi=1/\varkappa_1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{33}$$

Wie diese Gleichung numerisch gelöst wird, soll an den folgenden Beispielen im einzelnen gezeigt werden.

4. Beispiel I. Wir wenden das angegebene Lösungsverfahren auf Scheiben an, die am Innenrand starr eingespannt ($B_i = \infty$) und am Außenrand frei sind ($B_a = 0$), so daß die Randbedingungen einfacher

$$\eta_p(\xi_i) = \eta'_p(\xi_a) = 0 \tag{34}$$

lauten. Für die Parameter des Scheibenprofils (6) wählen wir mit $\varkappa_1 = 2{,}5$

$$p = 1\,, \qquad c = 2{,}5\,r_a\,. \tag{35}$$

also

$$y = a\,e^{-r/2{,}5\,r_a}\,. \tag{36}$$

Die Differentialgleichung (10) vereinfacht sich damit zu

$$\eta'' + \frac{3-\xi}{\xi}\eta' + u^2\eta = 0 \tag{37}$$

und könnte mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen allgemein gelöst werden. Dadurch würde aber die Eigenwertsermittlung schließlich ebenfalls auf Reihenentwicklungen hinführen. Wir bestimmen den niedersten Eigenwert

$$\lambda\,r_a = \frac{u}{2{,}5} = 5\,\pi\,\alpha\,r_a\sqrt{\frac{\gamma}{g\,G}} \tag{38}$$

in Abhängigkeit vom Halbmesserverhältnis $\varkappa_2 = r_i/r_a$.

Zunächst erhalten wir durch Einsetzen der Entwicklung (11) in (37) für die Koeffizienten $a_{1,n}$ die Rekursionsformel

$$[n\,(n-1) + 3\,n]\,a_{1,n} - (n-1)\,a_{1,n-1} + u^2\,a_{1,n-2} = 0\,, \tag{39}$$

woraus für die Partikulärlösung (11) im Falle $p = 1$

$$\eta_{11} = 1 - \frac{u^2}{8}\xi^2 - \frac{u^2}{60}\xi^3 - \frac{u^2(2-5\,u^2)}{40\cdot 24}\xi^4 - \frac{u^2(2-9\,u^2)}{240\cdot 35}\xi^5 - \frac{u^2(8-50\,u^2+35\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 48}\xi^6 - \frac{u^2(40-314\,u^2+463\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 40\cdot 63}\xi^7 - \cdots \tag{40}$$

kommt. Für die zweite partikuläre Lösung können wir das zweite Glied der Gleichung (23) verwenden. Geht man mit diesem Glied in die Differentialgleichung (37) ein, so ergibt sich

$$\left(2\,\eta'_{11} + \frac{3-\xi}{\xi}\eta_{11}\right)\left(\frac{1}{\xi^3} + \frac{b_{11}}{\xi^2} + \frac{b_{12}}{\xi} + b_{13} + b_{14}\,\xi + b_{15}\,\xi^2 + b_{16}\,\xi^3 + b_{17}\,\xi^4 + \cdots\right) + \eta_{11}\left(-\frac{3}{\xi^4} - \frac{2\,b_{11}}{\xi^3} - \frac{b_{12}}{\xi^2} + b_{14} + 2\,b_{15}\,\xi + 3\,b_{16}\,\xi^2 + 4\,b_{17}\,\xi^3 + \cdots\right) = 0 \tag{41}$$

oder mit (40)

$$\left[\frac{3}{\xi} - 1 - \frac{7\,u^2}{8}\xi - \frac{u^2}{40}\xi^2 - \frac{u^2(6-55\,u^2)}{120\cdot 8}\xi^3 - \frac{u^2(34-293\,u^2)}{40\cdot 24\cdot 35}\xi^4 - \frac{u^2(72-674\,u^2+875\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 80}\xi^5 - \frac{u^2(520-5426\,u^2+12067\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 72\cdot 70}\xi^6\right]\left[\frac{1}{\xi^3} + \frac{b_{11}}{\xi^2} + \frac{b_{12}}{\xi} + b_{13} + b_{14}\,\xi + b_{15}\,\xi^2 + b_{16}\,\xi^3 + \cdots\right] + \left[1 - \frac{u^2}{8}\xi^2 - \frac{u^2}{60}\xi^3 - \frac{u^2(2-5\,u^2)}{40\cdot 24}\xi^4 - \frac{u^2(2-9\,u^2)}{240\cdot 35}\xi^5 - \frac{u^2(8-50\,u^2+35\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 48}\xi^6 - \frac{u^2(40-314\,u^2+463\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 40\cdot 63}\xi^7\right]\left[-\frac{3}{\xi^4} - \frac{2\,b_{11}}{\xi^3} - \frac{b_{12}}{\xi^2} + b_{14} + 2\,b_{15}\,\xi + 3\,b_{16}\,\xi^2 + 4\,b_{17}\,\xi^3 + \cdots\right] = 0\,. \tag{42}$$

Dies führt auf die Identität

$$(b_{11}-1)\frac{1}{\xi^3}+\left(2\,b_{12}-b_{11}-\frac{u^2}{2}\right)\frac{1}{\xi^2}+\left(3\,b_{13}-b_{12}-\frac{5\,u^2}{8}\,b_{11}+\frac{u^2}{40}\right)\frac{1}{\xi}$$
$$+\left(4\,b_{14}-b_{13}-\frac{6\,u^2}{8}\,b_{12}+\frac{u^2}{120}\,b_{11}+\frac{u^4}{24}\right)+\left[5\,b_{15}-b_{14}-\frac{7\,u^2}{8}\,b_{13}-\frac{u^2}{120}\,b_{12}+\frac{u^2(45\,u^2-2)}{120\cdot 8}\,b_{11}\right.$$
$$\left.+\frac{u^2(37\,u^2-2)}{40\cdot 24\cdot 7}\right]\xi+\left[6\,b_{16}-b_{15}-u^2\,b_{14}-\frac{u^2}{40}\,b_{13}+\frac{u^2(25\,u^2-2)}{60\cdot 8}\,b_{12}+\frac{u^2(221\,u^2-18)}{40\cdot 24\cdot 35}\,b_{11}\right.$$
$$\left.-\frac{u^2(8-106\,u^2+175\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 20}\right]\xi^2+\left[7\,b_{17}-b_{16}-\frac{9\,u^2}{8}\,b_{15}-\frac{u^2}{24}\,b_{14}-\frac{u^2(6-55\,u^2)}{120\cdot 8}\,b_{13}\right.$$
$$\left.-\frac{u^2(26-257\,u^2)}{240\cdot 35\cdot 4}\,b_{12}-\frac{u^2(136-1522\,u^2+2275\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 240}\,b_{11}-\frac{u^2(280-3542\,u^2+9289\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 72\cdot 70}\right]\xi^3+\cdots=0\,, \tag{43}$$

aus der sich die Koeffizienten b_{1n} nacheinander zu

$$\left.\begin{aligned}
&b_{11}=F_{11}(u^2,p)=1\,,\quad b_{12}=F_{12}(u^2,p)=\frac{2+u^2}{4}\,,\quad b_{13}=F_{13}(u^2,p)=\frac{10+17\,u^2}{60}\,,\\
&b_{14}=F_{14}(u^2,p)=\frac{40+156\,u^2+35\,u^4}{960}\,,\quad b_{15}=F_{15}(u^2,p)=\frac{280+2116\,u^2+1573\,u^4}{240\cdot 140}\,,\\
&b_{16}=F_{16}(u^2,p)=\frac{1120+14984\,u^2+24734\,u^4+3325\,u^6}{240\cdot 280\cdot 12}\,,\\
&b_{17}=F_{17}(u^2,p)=\frac{23520+528584\,u^2+1622894\,u^{24}+708701\,u^6}{240\cdot 280\cdot 21\cdot 84}
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

bestimmen.

In (24) mit (25) eingesetzt erhalten wir als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (37)

$$\eta_1=\left[1-\frac{u^2}{8}\,\xi^2-\frac{u^2}{60}\,\xi^3-\frac{u^2(2-5\,u^2)}{40\cdot 24}\,\xi^4-\frac{u^2(2-9\,u^2)}{240\cdot 35}\,\xi^5-\frac{u^2(8-50\,u^2+35\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 48}\,\xi^6\right.$$
$$\left.-\frac{u^2(40-314\,u^2+463\,u^4)}{240\cdot 28\cdot 40\cdot 63}\,\xi_7-\cdots\right]\left[D+H\left(-\frac{1}{2\,\xi^2}-\frac{1}{\xi}+\frac{2+u^2}{4}\ln\xi+\frac{10+17\,u^2}{60}\,\xi\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{40+156\,u^2+35\,u^4}{240\cdot 8}\,\xi^2+\frac{280+2116\,u^2+1573\,u^4}{240\cdot 140\cdot 3}\,\xi^3+\frac{1120+14984\,u^2+24734\,u^4+3325\,u^6}{240\cdot 280\cdot 48}\,\xi^4\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{23520+528584\,u^2+16228964\,u^4+708701\,u^6}{240\cdot 280\cdot 21\cdot 84\cdot 5}\,\xi^5+\cdots\right)\right]. \tag{45}$$

Die Frequenzgleichung (33) lautet wegen $B_i=\infty$, $B_a=0$, $\varkappa_1=2{,}5$ jetzt

$$\begin{vmatrix}\zeta_{12}(0{,}4\,\varkappa_2) & 1\\ (\eta_{11}\,\zeta_{12})'_{\xi=0{,}4} & \eta'_{11}(0{,}4)\end{vmatrix}=0\,. \tag{46}$$

Um sie aufzulösen, wählen wir folgendes Näherungsverfahren. Wir berücksichtigen von der Entwicklung (45) nur die ersten Glieder gemäß

$$\eta_1\approx\left(1-\frac{u^2}{8}\,\xi^2-\frac{u^2}{60}\,\xi^3\right)\left[D+H\left(-\frac{1}{2\,\xi^2}-\frac{1}{\xi}+\frac{2+u^2}{4}\ln\xi+\frac{10+17\,u^2}{60}\,\xi\right)\right], \tag{47}$$

so daß wir also

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{11}&=1-\frac{u^2}{8}\,\xi^2-\frac{u^2}{60}\,\xi^3\,,\\
\zeta_{12}&=-\frac{1}{2\,\xi^2}-\frac{1}{\xi}+\frac{2+u^2}{4}\ln\xi+\frac{10+17\,u^2}{60}\,\xi
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

haben. Damit wird (46) eine Gleichung von endlichem Grad in u^2, die numerisch gelöst werden kann. Den so erhaltenen Näherungswert für den niedersten Eigenwert u^2 werden wir hernach verbessern, indem wir von der Entwicklung (45) weitere Glieder hinzunehmen. Der Gang der

Rechnung im einzelnen sei nun für das Zahlenbeispiel $\varkappa_2 = 0{,}05$, also $0{,}4\,\varkappa_2 = 0{,}02$ vorgeführt. Aus (48) kommt

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{12}(0{,}02) &= -1301{,}952679 - 0{,}972339\,u^2\,, & \zeta_{12}(0{,}4) &= -6{,}016479 - 0{,}115740\,u^2\,, \\ \eta_{11}(0{,}4) &= 1 - 0{,}021067\,u^2\,, & \zeta'_{12}(0{,}4) &= 23{,}291667 + 0{,}908333\,u^2\,, \\ \eta'_{11}(0{,}4) &= -0{,}108000\,u^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Mit diesen Werten lautet die Frequenzgleichung (46), wie folgt:

$$\begin{vmatrix} -1301{,}952679 - 0{,}972339\,u^2 & 1 \\ 23{,}291667 + 1{,}067427\,u^2 - 0{,}006636\,u^4 & -0{,}108000\,u^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{50}$$

oder ausgerechnet

$$0{,}111649\,u^4 + 139{,}543465\,u^2 - 23{,}291667 = 0 \tag{51}$$

mit der positiven Wurzel

$$u^2 = 0{,}166911\,. \tag{52}$$

Wir prüfen jetzt die Güte dieses Verfahrens, indem wir in der Entwicklung (45) noch ein weiteres Glied berücksichtigen und somit also

$$\left.\begin{aligned} \eta_{11} &= 1 - \frac{u^2}{8}\xi^2 - \frac{u^2}{60}\xi^3 - \frac{u^2(2-5\,u^2)}{40\cdot 24}\xi^4 \\ \zeta_{12} &= -\frac{1}{2\,\xi^2} - \frac{1}{\xi} + \frac{2+u^2}{4}\ln\xi + \frac{10+17\,u^2}{60}\xi + \frac{40+156\,u^2+35\,u^4}{240\cdot 8}\xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

ansetzen. Damit kommt

$$\begin{aligned} \zeta_{12}(0{,}02) &= -1301{,}952671 - 0{,}972306\,u^2 + 0{,}000007\,u^4\,, & \zeta_{12}(0{,}4) &= -6{,}013146 - 0{,}102740\,u^2 + 0{,}002917\,u^4\,, \\ \eta_{11}(0{,}4) &= 1 - 0{,}021120\,u^2 + 0{,}000133\,u^4\,, & \zeta'_{12}(0{,}4) &= 23{,}308334 + 0.973333\,u^2 + 0{,}014583\,u^4\,, \\ \eta'_{11}(0{,}4) &= -0{,}108533\,u^2 + 0{,}001333\,u^4\,. \end{aligned}$$

Die Frequenzgleichung wird

$$\begin{vmatrix} -1301{,}952671 - 0{,}972306\,u^2 + 0{,}000007\,u^4 & 1 \\ 23{,}308334 + 1{,}133686\,u^2 + 0{,}000261\,u^4 - 0{,}000663\,u^6 + 0{,}000006\,u^8 & -0{,}108533\,u^2 + 0{,}001333\,u^4 \end{vmatrix} = 0$$

oder explizit

$$\mathfrak{h}(u^2) = 23{,}308334 - 140{,}171146\,u^2 + 1{,}630237\,u^4 + 0{,}000663\,u^6 + 0{,}000007\,u^8 = 0\,. \tag{54}$$

Der Vergleich mit (51) zeigt, daß u^2 (52) schon eine Näherung für ihre kleinste positive Wurzel u_*^2 darstellt. Daher setzen wir

$$u_*^2 = u^2 + h_*^2 \quad \text{mit} \quad h_*^2 \ll u^2 \tag{55}$$

und haben nach dem *Newton*schen Näherungsverfahren

$$h_*^2 = -\frac{\mathfrak{h}(u^2)}{\dfrac{d[\mathfrak{h}(u^2)]}{d(u^2)}} = -\frac{0{,}0408}{139{,}6269} = -0{,}0003\,. \tag{56}$$

Aus der Kleinheit der Korrektur h_*^2 (56) schließen wir auf eine befriedigende Konvergenz des Näherungsverfahrens. Wir begnügen uns mit der so erhaltenen Näherung

$$u_*^2 = 0{,}1666 \tag{57}$$

zum niedersten Eigenwert u^2 im Falle $\varkappa_2 = 0{,}05$. Die Durchführung dieses Verfahrens für veränderlichen Wert des Parameters $\varkappa_2$ ergibt die Werte von Tabelle 1 für den niedersten Eigenwert (Tabelle 1):

Tabelle 1. *Niederster Eigenwert für $p = 1$, $c = 2{,}5\, r_a$; Scheibe am Innenrand starr eingespannt, Außenrand frei*

r_i/r_a	u^2 (1. Näherung)	u^2_* (2. Näherung)	u^2_{**} (3. Näherung)	$2\pi\alpha r_a\sqrt{\frac{\gamma}{gG}}$
0,05	0,1669	0,1666	—	0,1633
0,10	0,6540	0,6579	—	0,3244
0,15	1,4556	1,4846	—	0,4874
0,20	2,5761	2,6840	2,7024	0,6576
0,25	4,0164	4,3139	4,3725	0,8365

Der Tabelle entnimmt man, daß die Konvergenz des Verfahrens mit zunehmendem Halbmesserverhältnis r_i/r_a schlechter wird. Daher sind die Eigenwerte für $r_i/r_a = 0{,}20$ und 0,25 noch in einer dritten Näherung berechnet, die man dadurch erhält, daß man in den Entwicklungen für η_{11} und ζ_{12} je ein weiteres Glied berücksichtigt. Das Ergebnis ist, auf die bezogene Eigenfrequenz $2\eta\alpha r_a\sqrt{\gamma/gG}$ umgerechnet, in Abb. 1 dargestellt.

5. Beispiel II. Das zweite Beispiel unterscheidet sich von dem soeben behandelten Beispiel I lediglich dadurch, daß wir hier in der Profilkurve (6) $p = 2$ wählen, also von der Differentialgleichung

$$\eta'' + \frac{3 - 2\xi^2}{\xi}\eta' + u^2\eta = 0 \tag{58}$$

ausgehen, wozu für die Koeffizienten $a_{2,n}$ der Partikulärlösung die Rekursionsformel

$$[n(n-1) + 3n]\, a_{2,n} - 2(n-2)\, a_{2,n-2} + u^2 a_{2,n-2} = 0 \tag{59}$$

gehört. Daraus folgt mit $a_{2,0} = 1$, $a_{2,1} = 0$

$$\eta_{21} = 1 - \frac{u^2}{8}\xi^2 - \frac{u^2(4-u^2)}{8\cdot 24}\xi^4 - \frac{(4-u^2)(8-u^2)u^2}{8\cdot 24\cdot 48}\xi^6 - \frac{(4-u^2)(8-u^2)(12-u^2)u^2}{8\cdot 24\cdot 48\cdot 80}\xi^8 - \cdots. \tag{60}$$

Die in der zweiten Partikulärlösung auftretenden Koeffizienten b_{2n} werden wie oben berechnet und ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned}
&b_{21} = F_{21}(u^2, p) = 0\,, \quad b_{22} = F_{22}(u^2, p) = \frac{4 + u^2}{4}\,, \quad b_{23} = F_{23}(u^2, p) = 0\,,\\
&b_{24} = F_{24}(u^2, p)\,\frac{7u^4 + 56u^2 + 96}{48\cdot 4}\,, \qquad b_{25} = F_{25}(u^2, p) = 0\,,\\
&b_{26} = F_{26}(u^2, p) = \frac{19u^6 + 228u^4 + 800u^2 + 768}{16\cdot 6\cdot 48}\,, \quad b_{27} = F_{27}(u^2, p) = 0\,,\\
&b_{28} = F_{28}(u^2, p) = \frac{298u^8 + 4768u^6 + 25568u^4 + 51968u^2 + 30720}{48\cdot 24\cdot 80\cdot 8}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Die weitere numerische Auswertung liefert schließlich die in Tabelle 2 und Abb. 1 angegebenen Näherungswerte für den niedersten Eigenwert bzw. den bezogenen Wert der entsprechenden Eigenfrequenz. Die Konvergenz ist für technische Bedürfnisse noch ausreichend.

Tabelle 2. *Niederster Eigenwert für $p = 2$, $c = 2{,}5\, r_a$; Scheibe am Innenrand starr eingespannt, Außenrand frei*

r_i/r_a	u^2 (1. Näherung)	u^2_* (2. Näherung)	u^2_{**} (3. Näherung)	$2\pi\alpha r_a\sqrt{\frac{\gamma}{gG}}$
0,05	0,1453	0,1398	0,1397	0,1495
0,10	0,5857	0,5679	0,5675	0,3013
0,15	1,3343	1,3123	—	0,4582
0,20	2,4085	2,4226	—	0,6226
0,25	3,8208	3,9718	3,9972	0,7997

6. Zusammenfassung. Um die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen von nichtrotierenden Scheiben zu ermitteln, kann man, ausgehend von der Differentialgleichung (4) für die Schwingungsamplitude, bei vorgegebenem Scheibenprofil mit Hilfe von Reihenentwicklungen die Frequenzgleichung für die ersten Eigenfrequenzen in Form einer algebraischen Gleichung erhalten. Bei Scheiben mit einem Exponentialprofil (6), deren Innenrand starr eingespannt und deren Außenrand frei ist, konvergiert dieses Verfahren hinsichtlich der niedersten Eigenfrequenz befriedigend

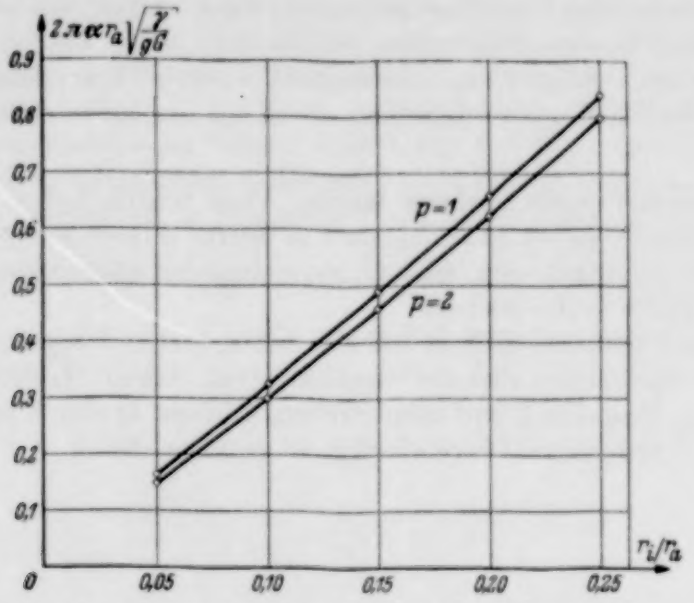

Abb. 1. Niederste Torsionseigenfrequenz von Scheiben mit starr eingespanntem Innenrand, freiem Außenrand und dem Profil $y = a\, e^{-(r/2{,}5\, r_a)^p}$ für $p = 1$ und $p = 2$.

und liefert die in den Tabellen 1 und 2 und in Abb. 1 dargestellten Ergebnisse. Da die Differentialgleichung (5) für die Amplitude der Dehnungseigenschwingungen im wesentlichen von derselben Art ist wie (4), läßt sich das Verfahren grundsätzlich auch auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen für die Dehnungsschwingungen anwenden. Es zeigt dann aber eine mangelhafte Konvergenz — eine Beobachtung, die man auch in anderen Fällen schon gemacht hat[1] —, so daß es sich hier für die numerische Rechnung nicht empfiehlt.

(Eingegangen am 11. September 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *S. Tameroğlu*, Istanbul (Türkei)
Nişantaş, Güzelbahçe, Yeni Kardeşler Sok. No 1/7.

[1] Vgl. *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, S. 396f. Leipzig 1949.

Ergänzungen zur Theorie des Voith-Schneider-Propellers

Von W.-H. Isay

1. Einleitung. In drei vorangehenden Arbeiten[1] wurde eine Theorie zur Behandlung der Strömung durch Voith-Schneider-Propeller entwickelt; diese umfaßt sowohl freifahrende Propeller als auch solche im Nachstrom eines Schiffsrumpfes. In der vorliegenden Arbeit sollen zur weiteren Abrundung der Theorie noch einige Fragen untersucht werden. Diese lassen sich im wesentlichen mit den bisher entwickelten Methoden behandeln, so daß wir uns auf eine knapp gefaßte Darstellung beschränken können.

2. Zwei Voith-Schneider-Propeller nebeneinander. Viele Schiffe haben zwei nebeneinander angeordnete Voith-Schneider-Propeller (Abb. 1), und es dürfte interessant sein, festzustellen, inwieweit sich diese gegenseitig beeinflussen, und ob es wenigstens näherungsweise möglich ist, beide Propeller als Einzelpropeller zu behandeln.

Um den Einfluß des Nachbarpropellers auf den betrachteten Propeller zu ermitteln, ersetzen wir ersteren durch eine äquivalente Zirkulationsdichte (vgl. Arbeit II, Ziff. 2). Somit ist die vom Propeller **2** und seinen freien Wirbeln in der Kreisbahn des Propellers **1** induzierte Geschwindigkeit gegeben durch

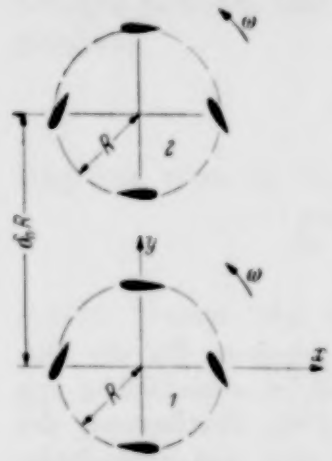

Abb. 1.

$$u_2^{(1)} - i\,v_2^{(1)} = \frac{i}{2\pi}\,\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \Gamma_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{d\vartheta}{e^{i\Phi} - e^{i\vartheta} - i\,\delta_0}$$

$$- \frac{i}{2\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \Gamma_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{d\vartheta\,d\chi}{e^{i\Phi} - e^{i\vartheta} - \chi - i\,\delta_0}\,. \qquad (1)$$

mit $\chi = x/R$ und $\delta_0 > 2$. Analog erhält man die vom Propeller **1** in der Kreisbahn des Propellers **2** induzierte Geschwindigkeit $u_1^{(2)}$, $v_1^{(2)}$, indem man in (1) δ_0 durch $(-\delta_0)$ und Γ_2' durch Γ_1' ersetzt. Formel (1) gilt für einen 4flügeligen Propeller; bei 6 Flügeln ist lediglich der Faktor 2/3 wegzulassen. Die Randbedingung an den Flügeln der beiden Propeller ist natürlich jeweils die gleiche wie in Arbeit I, Ziff. 4; lediglich sind zusätzlich die vom Nachbarpropeller stammenden Geschwindigkeitskomponenten $u_2^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ bzw. $u_1^{(2)}$, $v_1^{(2)}$ zu berücksichtigen. Man erhält dann ein System von zwei simultanen Integralgleichungen für die Zirkulationsverteilungen $\gamma_1(\psi,t)$ und $\gamma_2(\psi,t)$. Die aus der Randbedingung am (4-flügeligen) Propeller 1 entstehende Integralgleichung lautet [vgl. (II, 20)]

$$\left.\begin{aligned}
&\omega\,r_0'\cos(\omega t+\lambda) - u_0\cos(\varphi+\omega t) + u_0\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin(\varphi+\omega t)\\
&+\frac{1}{4\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\Gamma_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\chi\sin\Phi+\sin(\Phi-\vartheta)-\delta_0\cos\Phi+h(t)\,[\chi\cos\Phi+\delta_0\sin\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}\chi^2+\frac{1}{2}\delta_0^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+\chi\cos\vartheta-\delta_0\sin\Phi+\delta_0\sin\vartheta}\\
&\qquad\times d\vartheta\,d\chi\\
&-\frac{1}{4\pi}\,\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\Gamma_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\sin(\Phi-\vartheta)-\delta_0\cos\Phi+h(t)\,[\delta_0\sin\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}\delta_0^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\delta_0\sin\Phi+\delta_0\sin\vartheta}\,d\vartheta\\
&+\frac{1}{4\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\Gamma_1'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\chi\sin\Phi+\sin(\Phi-\vartheta)+h(t)\,[\chi\cos\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+\chi\cos\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi\\
&+\frac{1}{4\pi}\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{q=1}^{4}\Gamma_1'\left(t+\frac{q-1}{2}\,\frac{\pi}{\omega}\right)\\
&\qquad=\frac{1}{4\pi}\sum_{q=1}^{4}\int_{-a}^{a}\gamma_1\left(\psi,\,t+\frac{q-1}{2}\,\frac{\pi}{\omega}\right)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\varphi-\psi-\frac{q-1}{2}\,\pi\right)d\psi\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

[1] *W. H. Isay*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 379 (Arbeit I); 24 (1956) S. 148 (Arbeit II); 25 (1957) S. 303 (Arbeit III).

Dabei ist

$$\Phi = \varphi + \omega t\,, \quad h(t) = \frac{r_0'}{R}\cos(\omega t + \lambda)\,, \quad \Gamma(t) = \int_{-\delta}^{\delta} \gamma(\psi, t)\, d\psi\,.$$

Die aus der Randbedingung am Propeller **2** entstehende Integralgleichung (2′) ist entsprechend, nur ist γ_1 durch γ_2 und δ_0 durch $(-\delta_0)$ zu ersetzen, so daß wir darauf verzichten, sie extra aufzuschreiben. Die bei einem 6-flügeligen Propeller geltenden Integralgleichungen lassen sich unter Beachtung der früheren Gleichung (I, 6) sofort ablesen.

Für die Auflösung des simultanen Integralgleichungssystems (2), (2′) wird das bisher benutzte und in Arbeit I ausführlich beschriebene Iterationsverfahren genau entsprechend angewendet. Die Kerne der Integralgleichungen (2), (2′) sind ja gegenüber (II, 20) bzw. (I, 6) unverändert geblieben; die neu hinzugekommenen Glieder stehen alle auf der linken Seite.

Bei der Durchführung des Iterationsverfahrens verwendet man für die neu hinzugekommenen Glieder die nachstehend aufgeführten Integralformeln, deren Beweis wir in Ziff. **5** nachtragen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,\frac{\chi\sin\Phi + \sin(\Phi-\vartheta) - \delta_0\cos\Phi + h(t)\,[\chi\cos\Phi + \delta_0\sin\Phi + \cos(\Phi-\vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi \\ &= \frac{i + h(t)}{n}\,\frac{e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^n} = \frac{i + h(t)}{n\,\delta_0^n}(-i)^n e^{-i\Phi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-n}{\nu}\left(\frac{e^{-i\Phi}}{i\delta_0}\right)^{\nu} \qquad (n \geqq 1\,,\ \delta_0 > 2)\,; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,\frac{\sin(\Phi-\vartheta) - \delta_0\cos\Phi + h(t)\,[\delta_0\sin\Phi + \cos(\Phi-\vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta}\,d\vartheta \\ &= -\frac{(i + h(t))\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^{n+1}} = -\frac{i + h(t)}{\delta_0^{n+1}}(-i)^{n+1} e^{-i\Phi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-n-1}{\nu}\left(\frac{e^{-i\Phi}}{i\delta_0}\right)^{\nu} \quad (n \geqq 1\,,\ \delta_0 > 2)\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\Phi-\vartheta) - \delta_0\cos\Phi + h(t)\,[\delta_0\sin\Phi + \cos(\Phi-\vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta}\,d\vartheta = -\frac{(i+h)\,e^{-i\Phi}}{e^{-i\Phi} + i\delta_0} + \frac{(i-h)\,e^{i\Phi}}{e^{i\Phi} - i\delta_0}\,. \tag{5}$$

Die Berechnung der resultierenden Flügelkräfte erfolgt genau nach dem früheren Verfahren (Arbeit I, Ziff. **8**), wobei natürlich die vom Nachbarpropeller induzierten Geschwindigkeitsanteile $u_2^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ bzw. $u_1^{(2)}$, $v_1^{(2)}$, zusätzlich zu berücksichtigen sind. Zur Berechnung dieser zusätzlichen Geschwindigkeitsanteile benötigt man die nachfolgend angegebenen Integralformeln, für deren Beweis auf Ziff. **5** verwiesen wird:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\vartheta}\,(\sin\vartheta - \sin\Phi + \delta_0)\,d\vartheta\,d\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = -\frac{i}{n}\,\frac{1}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^n}\,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\vartheta}\,(\cos\Phi - \cos\vartheta - \chi)\,d\vartheta\,d\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \chi\cos\Phi + \chi\cos\vartheta - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^n}\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\vartheta}\,(\sin\vartheta - \sin\Phi + \delta_0)\,d\vartheta}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = +\frac{i}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^{n+1}} \quad (n \geq 1)\,, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\vartheta}\,(\cos\Phi - \cos\vartheta)\,d\vartheta}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = +\frac{1}{(e^{-i\Phi} + i\delta_0)^{n+1}} \quad (n \geq 1)\,, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin\vartheta - \sin\Phi + \delta_0)\,d\vartheta}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = +\frac{2\delta_0 - 2\sin\Phi}{1 + \delta_0^2 - 2\delta_0\sin\Phi}\,, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\Phi - \cos\vartheta)\,d\vartheta}{1 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \delta_0\sin\Phi + \delta_0\sin\vartheta} = +\frac{2\cos\Phi}{1 + \delta_0^2 - 2\delta_0\sin\Phi}\,. \tag{11}$$

Auch zwei nebeneinanderliegende Voith-Schneider-Propeller können ohne weiteres im Nachstrom eines Schiffsrumpfes liegend behandelt werden (Abb. 2). Entsprechend der in Arbeit III Ziff. 2 entwickelten Theorie haben wir dazu lediglich die homogene Anströmung u_0 zu ersetzen durch

$$u_0 + u_0^* - i\,v_0^* = u_0\left[1 - \frac{b^2}{\left(z + a + b - i\,\delta_0\,\frac{R}{2}\right)^2}\right].$$

Für die Randbedingung am Propellerflügel benötigt man die Werte von u_0^* und v_0^* auf dem Umfang der beiden Propellerkreise. Es ist

$$u_0^* - i\,v_0^* = -\frac{u_0\,b^2}{\left(a + b - \frac{i}{2}\,\delta_0\,R\right)^2}\left[1 - \frac{2\,R\,e^{i\Phi}}{a + b - \frac{i}{2}\,\delta_0\,R} + \frac{3\,R^2\,e^{2i\Phi}}{\left(a + b - \frac{i}{2}\,\delta_0\,R\right)^2} - \ldots\right] \tag{12}$$

auf den Umfang des Propellerkreises **1**; und entsprechend auf dem Kreis **2**, wenn δ_0 durch $(-\delta_0)$ ersetzt wird. Die Zerlegung von (12) in Real- und Imaginärteil ist ohne weiteres möglich, und die

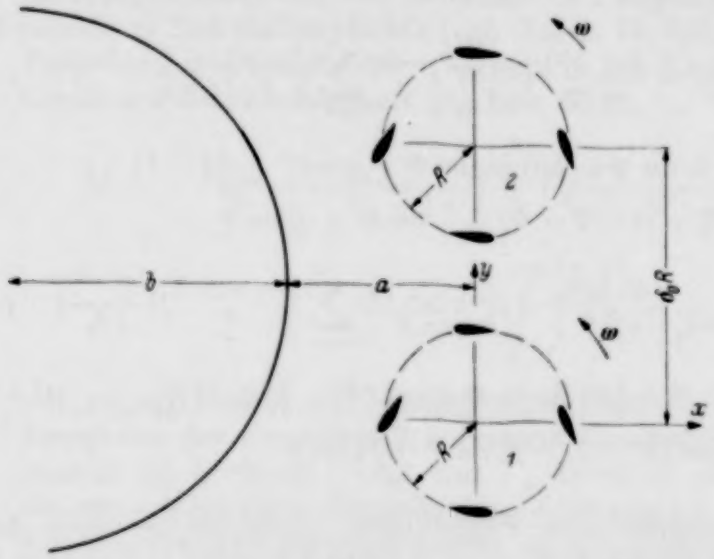

Abb. 2.

auf der linken Seite des Integralgleichungssystems (2), (2′) zusätzlich auftretenden Anteile sind dann leicht angebbar [vgl. Formel (III, 4)].

Die über den Propellerumfang gemittelte Nachstromziffer beträgt nach (12) für jeden der beiden Propeller in x-Richtung

$$A = b^2\,\frac{(a+b)^2 - \frac{1}{4}\,\delta_0^2\,R^2}{\left[(a+b)^2 + \frac{1}{4}\,\delta_0^2\,R^2\right]^2}. \tag{13}$$

Der über den Propellerumfang gemittelte Nachstrom in y-Richtung beträgt

$$\pm\,u_0\,b^2\,\frac{\delta_0\,R\,(a+b)}{\left[(a+b)^2 + \frac{1}{4}\,\delta_0^2\,R^2\right]^2} \qquad \begin{Bmatrix} + \text{ bei Propeller } \mathbf{1} \\ - \quad ,, \quad ,, \quad \mathbf{2} \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

3. Zahlenbeispiele. Wir teilen hier kurz die Ergebnisse von zwei Zahlenbeispielen mit, die mit Hilfe der Theorie aus Ziff. 2 berechnet wurden. Dabei handelt es sich um einen 4flügeligen Voith-Schneider-Doppelpropeller mit folgenden Daten: Flügeltiefe $2s = 20°$, Steigung $r_0'/R = 0{,}5$, Fortschrittsgrad $u_0/\omega R = 0{,}25$, Flügelstellung $\lambda = 0$ (für beide Propeller). Ferner sei der Abstand $\delta_0 = 3$.

Es sei dann Beispiel 6 der eben beschriebene Doppelpropeller freifahrend, und es sei Beispiel 6a der gleiche Propeller im Nachstrom des durch $b = 3\,R$, $a = 2\,R$ gegebenen Schiffsrumpfes.

Alle Geschwindigkeiten und die Zirkulation sind wieder in Einheiten von u_0 angegeben; alle Kräfte sind in Einheiten von $\varrho\, u_0^2 R$ angegeben[1]. Von den einzelnen Geschwindigkeitsanteilen, aus denen sich die resultierende Geschwindigkeit w (relativ zum Propellerflügel) zusammensetzt, geben wir hier lediglich die gegenüber früher neuartigen $u_2^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, $v_1^{(2)}$ sowie die Nachstromkomponenten u_0^*, v_0^* wieder.

Tabelle 1. (*Beispiel 6*)

Propeller 1						Propeller 2					
ωt	$u_2^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	ωt	$u_2^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	ωt	$u_1^{(2)}$	$v_1^{(2)}$	ωt	$u_1^{(2)}$	$v_1^{(2)}$
0°	+ 0,000	+ 0,043	180°	+ 0,014	+ 0,042	0°	— 0,039	— 0,084	180°	+ 0,042	— 0,092
30°	+ 0,002	+ 0,046	210°	+ 0,012	+ 0,039	30°	— 0,024	— 0,076	210°	+ 0,055	— 0,118
60°	+ 0,006	+ 0,047	240°	+ 0,007	+ 0,037	60°	— 0,011	— 0,073	240°	+ 0,045	— 0,163
90°	+ 0,006	+ 0,046	270°	+ 0,006	+ 0,036	90°	+ 0,001	— 0,072	270°	— 0,017	— 0,187
120°	+ 0,008	+ 0,048	300°	+ 0,004	+ 0,037	120°	+ 0,014	— 0,074	300°	— 0,062	— 0,143
150°	+ 0,013	+ 0,047	330°	+ 0,001	+ 0,039	150°	+ 0,027	— 0,080	330°	— 0,056	— 0,102

Tabelle 2. (*Beispiel 6a*)

Propeller 1					Propeller 2				
ωt	$u_2^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	u_0^*	v_0^*	ωt	$u_1^{(2)}$	$v_1^{(2)}$	u_0^*	v_0^*
0°	+ 0,031	+ 0,057	— 0,203	+ 0,110	0°	— 0,030	— 0,108	— 0,208	— 0,110
30°	+ 0,037	+ 0,062	— 0,241	+ 0,086	30°	— 0,014	— 0,097	— 0,185	— 0,144
60°	+ 0,046	+ 0,061	— 0,284	+ 0,067	60°	+ 0,002	— 0,092	— 0,175	— 0,184
90°	+ 0,048	+ 0,055	— 0,350	+ 0,068	90°	+ 0,017	— 0,090	— 0,174	— 0,228
120°	+ 0,050	+ 0,053	— 0,422	+ 0,122	120°	+ 0,032	— 0,091	— 0,195	— 0,287
150°	+ 0,051	+ 0,046	— 0,440	+ 0,229	150°	+ 0,049	— 0,096	— 0,266	— 0,337
180°	+ 0,049	+ 0,041	— 0,372	+ 0,322	180°	+ 0,068	— 0,109	— 0,372	— 0,322
210°	+ 0,043	+ 0,040	— 0,266	+ 0,337	210°	+ 0,086	— 0,140	— 0,440	— 0,229
240°	+ 0,038	+ 0,040	— 0,195	+ 0,287	240°	+ 0,076	— 0,197	— 0,422	— 0,122
270°	+ 0,034	+ 0,042	— 0,174	+ 0,228	270°	+ 0,003	— 0,228	— 0,350	— 0,068
300°	+ 0,031	+ 0,045	— 0,175	+ 0,184	300°	— 0,051	— 0,178	— 0,284	— 0,067
330°	+ 0,030	+ 0,051	— 0,185	+ 0,144	330°	— 0,047	— 0,131	— 0,241	— 0,086

In den Tab. 3 und 4 ist die resultierende Geschwindigkeit w nach Größe und Richtung (gegen die positive x-Achse) enthalten. Ferner die Profilzirkulation Γ, und die Flügelkräfte K zerlegt in ihre x- und y-Komponente. Dabei haben wir wie in Arbeit II S. 158 angenommen, daß der Druckmittelpunkt mit dem Profilmittelpunkt zusammenfalle, und daß es sich um abgerundete symmetrische Profile[2] handelt.

Tabelle. 3 (*Beispiel 6*)

Mittelpunkt des Flügelprofils	Propeller 1					Propeller 2				
	w_1	β_1	Γ_1	K_{1x}	K_{1y}	w_2	β_2	Γ_2	K_{2x}	K_{2y}
0°	4,29	— 67,0°	— 0,32	— 1,24	— 0,53	4,35	— 68,1°	— 0,41	— 1,64	— 0,66
30°	5,11	— 42,9°	— 0,49	— 1,71	— 1,84	5,12	— 44,0°	— 0,61	— 2,19	— 2,26
60°	5,44	— 23,8°	— 0,62	— 1,37	— 3,10	5,43	— 25,0°	— 0,75	— 1,73	— 3,70
90°	4,95	— 3,9°	— 0,23	— 0,08	— 1,13	4,93	— 5,2°	— 0,35	— 0,16	— 1,73
120°	4,92	+ 19,7°	+ 0,46	— 0,76	+ 2,14	4,85	+ 18,4°	+ 0,32	— 0,48	+ 1,45
150°	4,69	+ 44,8°	+ 0,93	— 3,06	+ 3,09	4,58	+ 43,5°	+ 0,77	— 2,43	+ 2,56
180°	4,25	+ 72,3°	+ 0,88	— 3,54	+ 1,13	4,10	+ 71,2°	+ 0,74	— 2,88	+ 0,98
210°	3,75	+ 103,3°	+ 0,54	— 1,98	— 0,47	3,52	+ 103,1°	+ 0,48	— 1,66	— 0,38
240°	3,30	+ 138,7°	+ 0,11	— 0,24	— 0,27	3,04	+ 141,1°	+ 0,22	— 0,42	— 0,53
270°	3,11	+ 177,8°	— 0,23	+ 0,03	+ 0,71	3,01	— 178,0°	+ 0,02	0,00	— 0,07
300°	3,03	— 139,1°	— 0,32	— 0,64	+ 0,74	3,09	— 137,5°	— 0,20	— 0,41	+ 0,45
330°	3,47	— 98,9°	— 0,24	— 0,82	+ 0,13	3,56	— 99,4°	— 0,28	— 0,97	+ 0,16

[1] Die Durchführung der in der vorliegenden Arbeit enthaltenen numerischen Rechnungen lag in den Händen von Frau *Märzke* und Fräulein *Endemann* (beide Rechner bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin).

[2] Dazu mag hier noch ausdrücklich bemerkt werden, daß ja die Gesamtzirkulation Γ eines dünnen ungewölbten Profils in guter Näherung mit derjenigen eines dicken Profils gleicher Skelettlinie (Strömungsbedingung) übereinstimmt. Das läßt sich ohne weiteres mit Hilfe der von *H. Schlichting* im VDI-Forschungsheft 447 (1955) angegebenen Formeln zur Profiltheorie zeigen und kann in analoger Weise auch für die Profile des Voith-Schneider-Propellers nachgewiesen werden.

Tabelle 4 (*Beispiel 6a*)

Mittelpunkt des Flügelprofils	Propeller 1					Propeller 2				
	w_1	β_1	Γ_1	K_{1x}	K_{1y}	w_2	β_2	Γ_2	K_{2x}	K_{2y}
0°	4,25	— 65,8°	—0,22	—0,84	—0,38	4,33	— 69,7°	—0,55	— 2,25	—0,83
30°	5,04	— 42,5°	—0,44	—1,49	—1,62	5,03	— 46,8°	—0,87	— 3,18	—2,98
60°	5,26	— 24,4°	—0,65	—1,40	—3,09	5,27	— 27,8°	—1,00	—2,47	—4,68
90°	4,65	— 4,2°	—0,25	—0,09	—1,17	4,73	— 8,5°	—0,63	—0,44	—2,93
120°	4,60	+ 21,6°	+0,56	—0,94	+2,38	4,52	+ 15,0°	—0,02	+0,02	—0,08
150°	4,59	+ 48,9°	+1,27	—4,40	+3,84	4,05	+ 41,4°	+0,47	—1,25	+1,42
180°	4,53	+ 76,3°	+1,34	—5,89	+1,44	3,51	+ 73,2°	+0,72	—2,41	+0,73
210°	4,24	+ 104,4°	+0,77	—3,15	—0,81	3,23	+ 108,7°	+0,80	—2,43	—0,82
240°	3,76	+ 136,6°	+0,02	—0,04	—0,05	3,14	+ 145,4°	+0,53	—0,95	—1,37
270°	3,43	+ 173,6°	—0,50	+0,19	+1,71	3,25	— 177,1°	+0,11	+0,02	—0,36
300°	3,06	— 143,0°	—0,58	—1,06	+1,41	3,17	— 136,5°	—0,14	—0,31	+0,33
330°	3,41	— 99,3°	—0,30	—1,02	+0,17	3,60	— 98,9°	—0,23	—0,81	+0,13

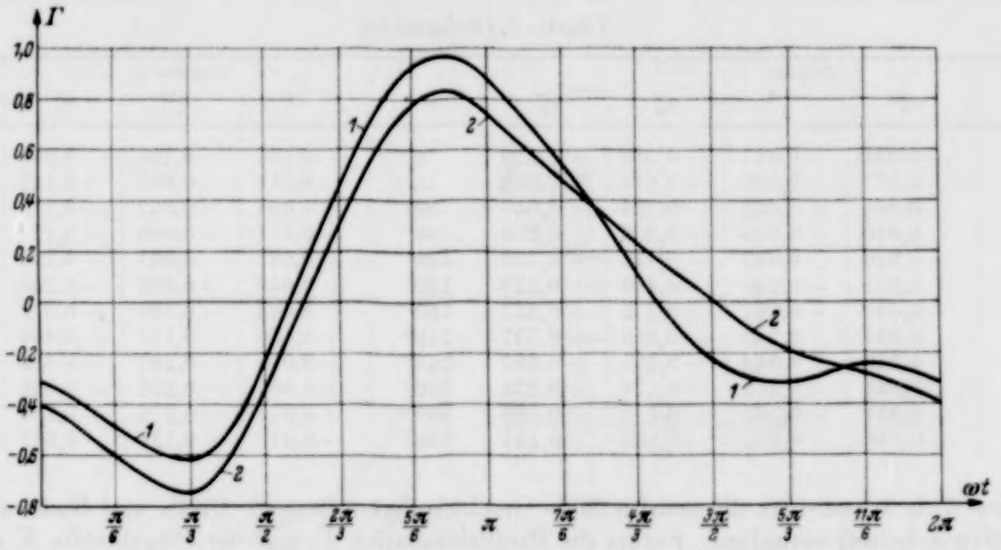

Abb. 3. Beispiel 6. Zirkulationsverteilung Γ_1 (Propeller 1) und Γ_2 (Propeller 2).

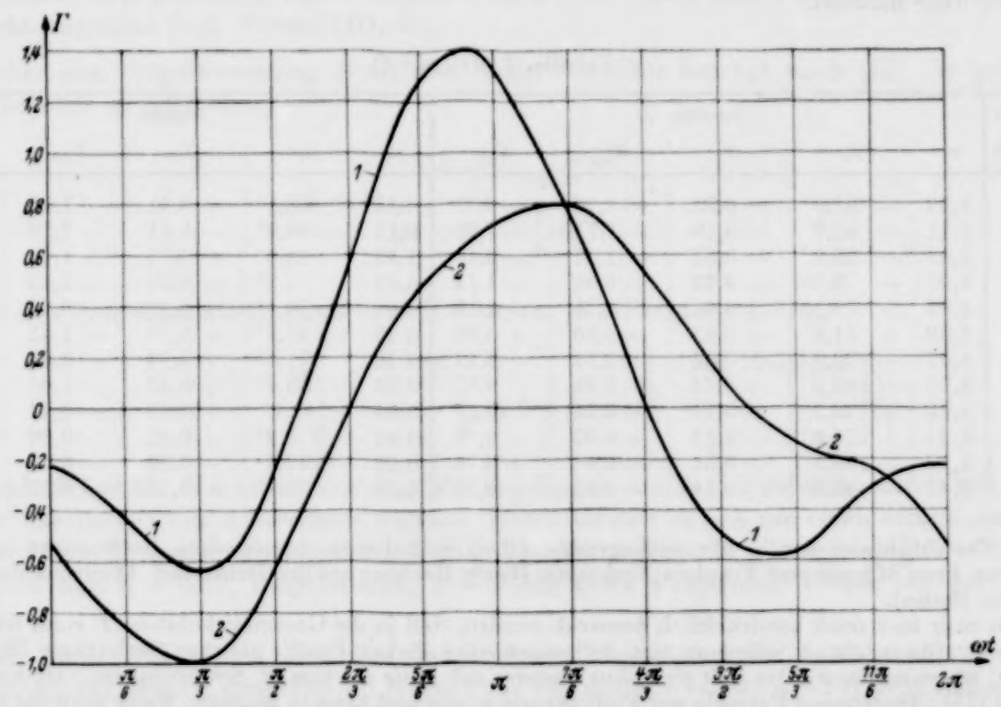

Abb. 4. Beispiel 6a. Zirkulationsverteilung Γ_1 (Propeller 1) und Γ_2 (Propeller 2).

In Abb. 3 und 4 sind die Zirkulationsverteilungen der behandelten Beispiele aufgezeichnet.

In Tab. 5 sind die resultierenden Gesamtkräfte der behandelten Voith-Schneider-Propeller zusammengestellt. (Als Mittelwerte der drei aus den Tab. 3 und 4 berechenbaren Propellerstellungen 0, $\pi/6$ und $\pi/3$.)

Tabelle 5

Beispiel	Propeller	$K_x^{(P)}$	$K_y^{(P)}$	$K^{(P)}$	Richtung β_K	Zusammenfassung $2 \cdot K^{(P)}$	Zusammenfassung Richtung β_K
6	1	−5,14	+0,20	5,14	+177,8°	10,18	−174,1°
	2	−4,99	−1,24	5,14	−166,1°		
6a	1	−6,71	+1,28	6,83	+169,2°	12,46	−168,3°
	2	−5,49	−3,81	6,68	−145,3°		

Die Ergebnisse von Beispiel 6 zeigen, daß zwar die zusammengefaßte Gesamtkraft beider Propeller das Doppelte der Kraft des entsprechenden Einzelpropellers (Beispiel 5) beträgt. Jedoch bestehen in den Einzelheiten des Strömungsbildes der beiden nebeneinanderliegenden Propeller immerhin gewisse Unterschiede.

Diese Unterschiede sind natürlich im Fall des Doppelnachstrompropellers Beispiel 6a wesentlich ausgeprägter; denn hier sind ja die Anströmverhältnisse beider Propeller ganz verschieden. Die Nachstromziffer beträgt nach (13) $\Lambda = 0{,}276$, und der mittlere Nachstrom in y-Richtung gemäß (14) $\pm 0{,}182$.

4. Seitwärtsfahrt. Für zwei nebeneinanderliegende Voith-Schneider-Propeller ist auch die Seitwärts- und Schrägfahrt von Interesse. Wir wollen auf dieses Problem in seiner vollen Allgemeinheit mit der Vielzahl von Parametern nicht eingehen. Lediglich die Behandlung des wichtigen Falles der Seitwärtsfahrt sei kurz angedeutet.

Dabei mögen die beiden Propeller wie in Abb. 1 liegen; sie werden in Richtung der positiven y-Achse mit der Geschwindigkeit v_0 angeströmt, bzw. sie bewegen sich in Richtung der negativen y-Achse.

Es sei ferner $\lambda = -\pi/2$, d. h. also $-r'/R = h(t) = r_0'/R \sin \omega t$ für die Flügel beider Propeller.

Neuartig ist jetzt, daß die von den Flügeln des Propellers 1 abgehenden freien Wirbel durch den Propeller 2 hindurch fließen. Das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel des Propellers 1 ist in einem beliebigen Punkt $z = r e^{i\varphi}$ gegeben durch

$$u_{f_1} - i\, v_{f_1} = -\frac{i}{2\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \dot{\Gamma}_1'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{d\vartheta\, dy}{r\, e^{i\varphi} - R\, e^{i\vartheta} - i\, y}\,, \tag{15}$$

während man für den Propeller 2 hat

$$u_{f_2} - i\, v_{f_2} = -\frac{i}{2\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \dot{\Gamma}_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{d\vartheta\, dy}{r\, e^{i\varphi} - R\, e^{i\vartheta} - i\, y - i\,\delta_0 R} \tag{16}$$

(4flügeliger Propeller). Die Randbedingung an den Propellerflügeln ist prinzipiell genau wie früher, und der Rechnungsgang an sich auch. Jedoch sind die durch (15) und (16) gegebenen Geschwindigkeiten teilweise neuartig, so daß wir kurz die aus ihnen entstehenden Ausdrücke angeben wollen. Die Geschwindigkeitskomponenten der freien Wirbel beider Propeller geben auf der linken Seite der aus der Randbedingung an den Flügeln von Propeller 1 entstehenden Integralgleichung mit $y = R\chi$ den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{1}{4\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \dot{\Gamma}_1'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\sin(\Phi-\vartheta) - \chi\cos\Phi + h(t)\,[\chi\sin\Phi + \cos(\Phi-\vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - \chi\sin\Phi + \chi\sin\vartheta}\, d\vartheta\, d\chi \\ &+\frac{1}{4\pi\omega}\,\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \dot{\Gamma}_2'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\sin(\Phi-\vartheta) - (\chi+\delta_0)\cos\Phi + h(t)\,[(\chi+\delta_0)\sin\Phi + \cos(\Phi-\vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}(\chi+\delta_0)^2 - \cos(\Phi-\vartheta) - (\chi+\delta_0)\sin\Phi + (\chi+\delta_0)\sin\vartheta}\, d\vartheta\, d\chi\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Der entsprechende Ausdruck (17′) auf der linken Seite der aus der Randbedingung an den Flügeln des Propeller **2** entstehenden Integralgleichung wird formal aus (17) erhalten durch Vertauschung von $\dot{I}'_2$ mit $\dot{I}'_1$ und δ_0 mit $(-\delta_0)$. Der Charakter der beiden Ausdrücke (17) und (17′) ist jedoch völlig verschieden. Dieses ist am besten aus den folgenden Integralformeln ersichtlich, die für die Auflösung des Integralgleichungssystems nach dem früheren Iterationsverfahren benötigt werden. Es gilt mit $\delta_0 > 2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,\frac{\sin(\Phi-\vartheta)-(\chi+\delta_0)\cos\Phi+h(t)\,[(\chi+\delta_0)\sin\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}(\chi+\delta_0)^2-\cos(\Phi-\vartheta)-(\chi+\delta_0)\sin\Phi+(\chi+\delta_0)\sin\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi \\ = -\frac{1}{n}\,\frac{(1-ih)\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi}+i\delta_0)^n} \qquad (0\leqq\Phi\leqq 2\pi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,\frac{\sin(\Phi-\vartheta)-(\chi-\delta_0)\cos\Phi+h(t)\,[(\chi-\delta_0)\sin\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}(\chi-\delta_0)^2-\cos(\Phi-\vartheta)-(\chi-\delta_0)\sin\Phi+(\chi-\delta_0)\sin\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi \\ &= -\frac{1}{n}\,\frac{(1-ih)\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi}-i\delta_0)^n} \pm \frac{2}{n}\,[\cos(n-1)\Phi-\cos(n+1)\Phi+h\sin(n-1)\Phi+h\sin(n+1)\Phi] \\ &\qquad +\text{ für }\ 0\leqq\Phi\leqq\pi\,;\ \ -\text{ für }\ \pi\leqq\Phi\leqq 2\pi\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

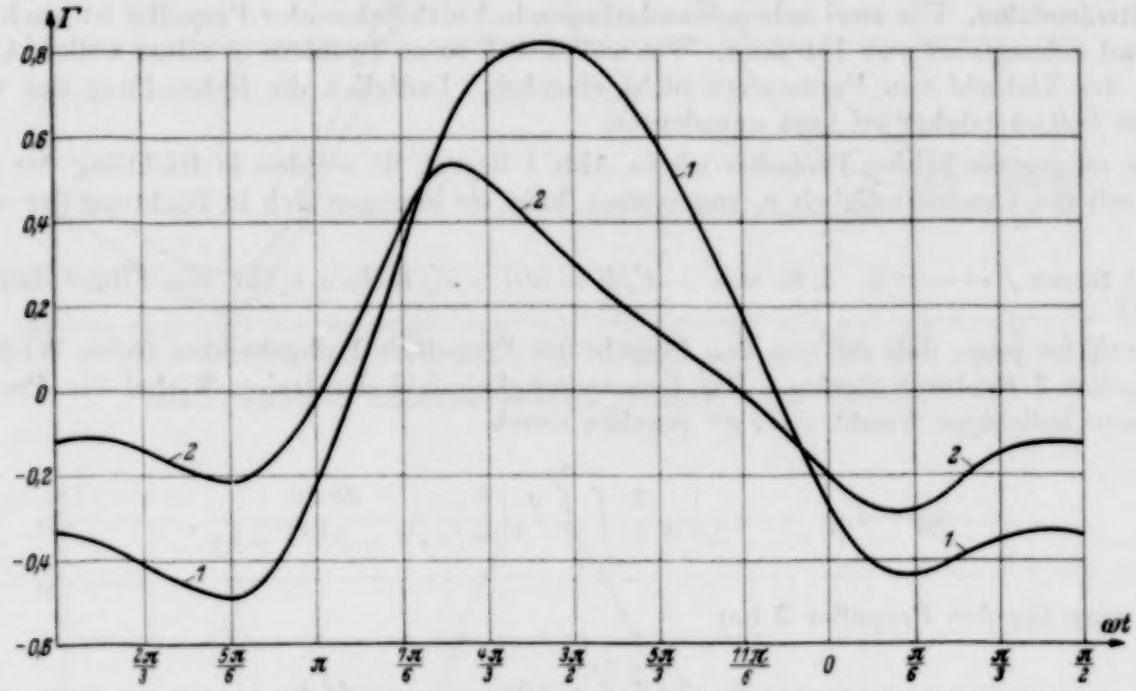

Abb. 5. Beispiel 7. Zirkulationsverteilung Γ_1 (Propeller 1) und Γ_2 (Propeller 2).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,\frac{\sin(\Phi-\vartheta)-\chi\cos\Phi+h(t)\,[\chi\sin\Phi+\cos(\Phi-\vartheta)-1]}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\Phi-\vartheta)-\chi\sin\Phi+\chi\sin\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,(-1+ih)\,e^{i(n-1)\Phi} & \text{für}\quad \pi\leqq\Phi\leqq 2\pi\,, \\ \dfrac{1}{n}\,(1+ih)\,e^{-i(n-1)\Phi}-\dfrac{2}{n}\cos(n+1)\Phi+h\dfrac{2}{n}\sin(n+1)\Phi & \text{für}\quad 0\leqq\Phi\leqq\pi\,. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Für den Beweis der Integralformeln (18), (19), (20) wird auf Ziff. **5** verwiesen.

Nach der Theorie von Ziff. **4** wurden die Zirkulationsverteilungen $\Gamma_1(t)$ und $\Gamma_2(t)$ der Flügel eines seitwärtsfahrenden Voith-Schneider-Doppelpropellers mit den folgenden Daten berechnet (Beispiel 7): Je 4 Flügel, Flügeltiefe $2\varkappa = 20°$, Steigung $r'_0/R = 0{,}25$, Fortschrittsgrad $v_0/\omega R = 1/8$, Abstand $\delta_0 = 3$. Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 5 dargestellt. Man erkennt deutlich, wie die Flügelzirkulation und damit auch die Flügelkräfte bei Propeller **2** herabgemindert werden infolge des Durchflusses der von Propeller **1** stammenden freien Wirbel.

5. Einige wichtige Integralformeln. Den Beweis der in Ziff. 2 und 4 mitgeteilten Integralformeln führen wir in einer verallgemeinerten Form, indem wir nunmehr auch freie Wirbel zulassen, deren Abflußrichtung mit der x-Achse einen beliebigen Winkel Θ einschließt. In Ziff. 2 war $\Theta = 0$, und in Ziff. 4 war $\Theta = \pi/2$.

a) Die freien Wirbel des gerade betrachteten Propellers (Eigenpropellers) geben in der Randbedingungsintegralgleichung Anlaß zu dem Integralausdruck

$$e^{i n \Theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n (\vartheta - \Theta)} \frac{\sin(\Phi - \vartheta) + \chi \sin(\Phi - \Theta) + h(t)\,[\chi \cos(\Phi - \Theta) + \cos(\Phi - \vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 - \cos(\Phi - \vartheta) - \chi \cos(\Phi - \Theta) + \chi \cos(\vartheta - \Theta)}\, d\vartheta\, d\chi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n}(i + h)\, e^{i(n-1)\Phi}\, e^{i\Theta} & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi - \Theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}, \\ \dfrac{(-1)^n}{n}(i - h)\, e^{-i(n-1)\Phi}\, e^{i(2n-1)\Theta} - \dfrac{1}{n}(i - h)\, e^{i(n+1)\Phi}\, e^{-i\Theta} & \\ \quad + \dfrac{(-1)^n}{n}(i + h)\, e^{-i(n+1)\Phi}\, e^{i(2n+1)\Theta} & \text{für} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq \Phi - \Theta \leqq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Integralformel entnimmt man unmittelbar aus dem Ergebnis von Integralformel (I, 9). Damit ist als Sonderfall $\Theta = \pi/2$ auch Formel (20) bewiesen.

b) Die freien Wirbel des Nachbarpropellers geben in der Randbedingungsintegralgleichung für $n \geqq 1$ Anlaß zu dem Integralausdruck

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n \vartheta}$$

$$\times \frac{\sin(\Phi - \vartheta) + \chi \sin(\Phi - \Theta) - \delta_0 \cos\Phi + h(t)\,[\chi \cos(\Phi - \Theta) + \delta_0 \sin\Phi + \cos(\Phi - \vartheta) - 1]}{1 + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\delta_0^2 - \cos(\Phi - \vartheta) - \chi \cos(\Phi - \Theta) + \chi \cos(\vartheta - \Theta) + \delta_0 \chi \sin\Theta - \delta_0 \sin\Phi + \delta_0 \sin\vartheta}\, d\vartheta\, d\chi .$$

Wir berechnen das Integral I_n unter der Voraussetzung, daß die freien Wirbel des Nachbarpropellers nicht durch den betrachteten Propeller hindurchfließen. Wie man sich durch Aufzeichnen der entsprechenden komplexen Vektoren in der (x, y)-Ebene leicht klar macht, bedeutet diese Voraussetzung, daß immer

$$|i\,\delta_0 + \chi\, e^{i\Theta} - e^{i\Phi}| > 1$$

sein muß. In dem Integral I_n vollziehen wir zunächst die Integration über ϑ nach der Residuenmethode mit der Substitution $z = e^{i\vartheta}$; Integrationsweg wird der Einheitskreis. Es folgt

$$I_n = \int_0^{\infty} \Bigg[\frac{1}{2\pi i} \oint_{(EK)} z^{n-1}$$

$$\times \frac{i z^2 e^{-i\Phi} - i e^{i\Phi} + 2z(\chi \sin(\Phi - \Theta) - \delta_0 \cos\Phi) + h\,[z^2 e^{-i\Phi} + e^{i\Phi} + 2z(\chi \cos(\Phi - \Theta) + \delta_0 \sin\Phi - 1)]}{(e^{-i\Theta}\chi - e^{-i\Phi} - i\,\delta_0)(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$\times dz \Bigg] d\chi .$$

Dabei ist

$$z_1 = \frac{1}{e^{-i\Phi} - \chi\, e^{-i\Theta} + i\,\delta_0}, \qquad z_2 = e^{i\Phi} - \chi\, e^{i\Theta} - i\,\delta_0, \qquad z_1 \bar{z}_2 = 1 .$$

Da also immer $|z_2| > 1$ d. h. $|z_1| < 1$ ist, erhält man weiter nach einigen elementaren Umformungen

$$I_n = \int_0^{\infty} \left[- \frac{(i + h)\, e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} - \chi\, e^{-i\Theta} + i\,\delta_0)^{n+1}} \right] d\chi = \frac{1}{n} \frac{(i + h)\, e^{-i\Phi}\, e^{i\Theta}}{(e^{-i\Phi} + i\,\delta_0)^n} .$$

Damit ist im Sonderfall $\Theta = 0$ auch die Integralformel (3) und als Sonderfall $\Theta = \pi/2$ die Integralformel (18) bewiesen. Außerdem ist Formel (4) bewiesen, wenn man bei I_n lediglich das Ergebnis der Integration über ϑ betrachtet und $\chi = 0$ setzt.

Der Beweis der Integralformeln (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) wird ganz ähnlich geführt, so daß wir darauf verzichten können, ihn hier wiederzugeben.

c) Für den Fall, daß die freien Wirbel des Nachbarpropellers durch den betrachteten Propeller hindurchfließen, ist das Integral I_n im allgemeinen nur noch sehr umständlich auswertbar. Hier wollen wir uns deshalb lediglich auf den in Ziff. 4 benötigten Sonderfall $\Theta = \pi/2$, d. h. auf den Beweis der Integralformel (19) beschränken.

Die Integration über ϑ vollziehen wir wieder mit Hilfe der Residuenmethode. Substitution $z = e^{i\vartheta}$. Integrationsweg Einheitskreis. Dann nimmt das Integral über ϑ in (19) die Form an

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(EK)} z^{n-1}\,\frac{i\,z^2 e^{-i\Phi} - i\,e^{i\Phi} - 2\,z\,(\chi-\delta_0)\cos\Phi + h\,[z^2 e^{-i\Phi} + e^{i\Phi} + 2\,z\,(\chi-\delta_0)\sin\Phi - 2\,z]}{(-i\,\chi - e^{-i\Phi} + i\,\delta_0)\,(z-z_1)\,(z-z_2)}\,dz$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{(i+h)\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0)^{n+1}} & \text{für } |z_1|<1 \quad \left(z_1 = \dfrac{1}{e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0},\quad z_2 = e^{i\Phi} - i\,\chi + i\,\delta_0\right), \\ -(i-h)\,e^{i\Phi}\,(e^{i\Phi} - i\,\chi + i\,\delta_0)^{n-1} & \text{für } |z_2|<1 \quad (z_1\,\bar{z}_2 = 1), \end{cases}$$

wie man nach einer elementaren Zwischenrechnung leicht bestätigt. Die Grenze $|z_1| = |z_2| = 1$ bedeutet

$$1 + (\chi-\delta_0)^2 - 2(\chi-\delta_0)\sin\Phi = 1, \quad \text{also} \quad \chi = \delta_0 \quad \text{oder} \quad \chi - \delta_0 = 2\sin\Phi.$$

Für die nun folgende Integration über χ haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist $\sin\Phi > 0$, $0 < \Phi < \pi$; dann ist $|z_2| > 1$ für $0 < \chi < \delta_0$, und $|z_2| < 1$ für $\delta_0 < \chi < \delta_0 + 2\sin\Phi$, und $|z_2| > 1$ für $\chi > \delta_0 + 2\sin\Phi$. Also wird das Integral (19)

$$-\int_0^{\delta_0} \frac{(i+h)\,e^{-i\Phi}\,d\chi}{(e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0)^{n+1}} - \int_{\delta_0}^{\delta_0+2\sin\Phi} (i-h)\,e^{i\Phi}\,(e^{i\Phi} - i\,\chi + i\,\delta_0)^{n-1}\,d\chi - \int_{\delta_0+2\sin\Phi}^{\infty} \frac{(i+h)\,e^{-i\Phi}\,d\chi}{(e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n}\,\frac{(1-i\,h)\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} - i\,\delta_0)^n} + \frac{2}{n}\cos(n-1)\Phi - \frac{2}{n}\cos(n+1)\Phi + \frac{2}{n}\,h\sin(n-1)\Phi + \frac{2}{n}\,h\sin(n+1)\Phi.$$

2. Es ist $\sin\Phi < 0$, $\pi < \Phi < 2\pi$; dann ist $|z_2| > 1$ für $0 < \chi < \delta_0 + 2\sin\Phi$, und $|z_2| < 1$ für $\delta_0 + 2\sin\Phi < \chi < \delta_0$ und $|z_2| > 1$ für $\chi > \delta_0$. Also wird das Integral (19)

$$-\int_0^{\delta_0+2\sin\Phi} \frac{(i+h)\,e^{-i\Phi}\,d\chi}{(e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0)^{n+1}} - \int_{\delta_0+2\sin\Phi}^{\delta_0} (i-h)\,e^{i\Phi}\,(e^{i\Phi} - i\,\chi + i\,\delta_0)^{n-1}\,d\chi - \int_{\delta_0}^{\infty} \frac{(i+h)\,e^{-i\Phi}\,d\chi}{(e^{-i\Phi} + i\,\chi - i\,\delta_0)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n}\,\frac{(1-i\,h)\,e^{-i\Phi}}{(e^{-i\Phi} - i\,\delta_0)^n} - \frac{2}{n}\cos(n-1)\Phi + \frac{2}{n}\cos(n+1)\Phi - \frac{2}{n}\,h\sin(n-1)\Phi - \frac{2}{n}\,h\sin(n+1)\Phi.$$

Für $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$ stimmen beide Werte überein. Damit ist Formel (19) bewiesen.

6. Verfeinerte Theorie des Voith-Schneider-Propellers. In der gesamten bisherigen Theorie haben wir die Zirkulationsverteilung der Propellerflügel nicht genau auf der Kontur des Flügelprofils angebracht, sondern auf dem Umfang des Propellerkreises (vgl. Arbeit I, S. 379). Daraus ergab sich eine erhebliche Vereinfachung für die Kerne der aufzulösenden Integralgleichungen. Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit sich die bisherige Theorie ändert, wenn die Zirkulationsverteilung der Propellerflügel genau auf der durch

$$\zeta_q = R\left[1 - \psi\,\frac{r_0'}{R}\cos\left(\omega t + \frac{q-1}{3}\pi + \lambda\right)\right] e^{i\left(\psi + \frac{q-1}{3}\pi + \omega t\right)} \qquad (q = 1, \ldots 6; \quad -\alpha \leqq \psi \leqq \alpha)$$

gegebenen Konturkurve der Flügelprofile angebracht wird[1]. Um das festzustellen, werden wir die aus Ziff. 4 der Arbeit I bekannte Randbedingung am Propellerflügel in der nunmehr verfeinerten Form ansetzen und die aus ihr entstehende an die Stelle von (I, 6) tretende Integralgleichung diskutieren.

Zunächst ist es einleuchtend, daß die genannte Verfeinerung nur bei dem gerade betrachteten Flügelprofil (Aufpunkt) berücksichtigt werden muß, während für die übrigen fünf bzw. drei Propellerflügel in jedem Fall die bisherige Methode beibehalten werden kann. In Formel (I, 1) ändert sich also nur der Summand $q=1$. Er lautet genommen in dem Flügelaufpunkt $z = r\,e^{i(\varphi+\omega t)}$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(\psi,t)\,R\,d\psi}{r\,e^{i(\varphi+\omega t)}-\varrho\,e^{i(\psi+\omega t)}}$$

mit

$$r = R\left[1-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right],\quad \varrho = R\left[1-\psi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right].$$

Den Wurzelausdruck des Bogenelementes haben wir in die Funktion γ mit einbezogen, was ohne weiteres möglich ist.

Für das von den freien Wirbeln induzierte Geschwindigkeitsfeld behalten wir den Ausdruck (I, 3), (II, 1) unverändert bei; in der Randbedingung am Propellerflügel setzen wir wie früher $r \approx R$ in den Formeln (I, 4). Denn bei der summarischen Näherungsformel für das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel hat es keinen Zweck, den genauen r-Wert einzusetzen; dadurch würde die Integraldarstellung nur kompliziert, ohne daß damit eine echte Genauigkeitssteigerung verbunden wäre. Die (I, 5) entsprechende Randbedingung am Propellerflügel lautet somit

$$\left.\begin{aligned}&\omega\,r\,r' + u_0\,r\cos(\varphi+\omega t) + u_0\,r'\sin(\varphi+\omega t)\\ &\quad = -\left[v_f(R,\varphi+\omega t)+v_\gamma(r,\varphi+\omega t)\right]\left[r\sin(\varphi+\omega t)-r'\cos(\varphi+\omega t)\right]\\ &\quad\quad -\left[u_f(R,\varphi+\omega t)+u_\gamma(r,\varphi+\omega t)\right]\left[r\cos(\varphi+\omega t)+r'\sin(\varphi+\omega t)\right]\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Dabei ist

$$r = R\left[1-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]$$

und wie früher

$$r' = -r_0'\cos(\omega t+\lambda)\,.$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Werte für die Geschwindigkeitskomponenten erhält man aus (21) die folgende zu (I, 6) analoge Integralgleichung für die Zirkulationsverteilung $\gamma(\psi, t)$:

$$\left.\begin{aligned}&\omega\,r_0'\cos(\omega t+\lambda)\left[1-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]-u_0\cos(\varphi+\omega t)\left[1-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]\\ &+u_0\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin(\varphi+\omega t)+\frac{1}{4\pi}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{q=2}^{6}\Gamma\left(t+\frac{q-1}{3}\,\frac{\pi}{\omega}\right)\\ &+\left(1-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right)\frac{1}{4\pi\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\dot\Gamma\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\chi\sin(\varphi+\omega t)+\sin(\varphi+\omega t-\vartheta)}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\varphi+\omega t-\vartheta)-\chi\cos(\varphi+\omega t)-\chi\cos\vartheta}\\ &\qquad\qquad\times d\vartheta\,d\chi\end{aligned}\right|$$

[1] Übrigens kann die ganze Theorie ohne weiteres auf allgemeinere Profilformen, z. B.

$$r = R\left[1+\frac{\tau}{2}\varphi^2-\varphi\,\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]\qquad(\tau=\text{konst.})$$

übertragen werden. Setzt man dann $\frac{r'}{R} = -\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)+\tau\varphi$ in (I, 6) ein, so ergibt sich aus den früheren Formeln, daß für $\tau \leqq \frac{1}{2}$ praktisch nur zu A_0 ein Anteil der Größe $-\pi\,\alpha^2\omega\,R\,\tau$ hinzutritt. Dadurch wird die Gesamtkraft des Propellers nicht geändert; der Schwerpunkt der Kraftwirkung verlagert sich jedoch für $\tau > 0$ auf den hinteren Teil des Flügelkreises, und für $\tau < 0$ auf den vorderen. Die bisherige Profilkontur mit $\tau = 0$ ist insofern ausgezeichnet, als sie fast genau die Krümmung der Kreiskontur hat; sie entspricht somit wegen des Überwiegens der Umfangsgeschwindigkeit in der Anströmung gegen das Profil dem Fall der Platte in homogener, gerader Anströmung.

$$+\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\frac{1}{4\pi\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\dot{I}'\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\chi\cos(\varphi+\omega t)-1+\cos(\varphi+\omega t-\vartheta)}{1+\frac{1}{2}\chi^2-\cos(\varphi+\omega t-\vartheta)-\chi\cos(\varphi+\omega t)-\chi\cos\vartheta}\,d\vartheta\,d\chi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{q=2}^{6}\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma\left(\psi,t+\frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\varphi-\psi-\frac{q-1}{3}\pi\right)d\psi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma(\psi,t)\,\frac{r\,r'+r\,\varrho\sin(\varphi-\psi)-r'\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}{r^2+\varrho^2-2\,r\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi\,. \qquad (22)$$

Bevor wir uns der Auflösung der Integralgleichung (22) zuwenden, haben wir ihren (dem Summanden $q=1$ entsprechenden) Hauptkernanteil auf der rechten Seite zu untersuchen und umzuformen. Zunächst wird dessen Nenner

$$r^2+\varrho^2-2\,r\,\varrho\cos(\varphi-\psi)=2\,R^2\,[1-\cos(\varphi-\psi)]\left[1-(\varphi+\psi)\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi^2+\psi^2-2\,\varphi\,\psi\cos(\varphi-\psi)}{2-2\cos(\varphi-\psi)}\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)\right].$$

Wegen $|\varphi-\psi|\leqq 2\,\alpha\leqq 0{,}42$ kann

$$\cos(\varphi-\psi)=1-\frac{1}{2}(\varphi-\psi)^2+\frac{1}{24}(\varphi-\psi)^4$$

gesetzt werden, so daß

$$\frac{\varphi^2+\psi^2-2\,\varphi\,\psi\cos(\varphi-\psi)}{2-2\cos(\varphi-\psi)}=1+\varphi\,\psi+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2$$

wird. Andererseits hat man für den Zähler

$$r\,r'+r\,\varrho\sin(\varphi-\psi)-r'\,\varrho\cos(\varphi-\psi)=-R^2\sin(\varphi-\psi)\left[1+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right]\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)$$
$$-R^2\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\left[1-\cos(\varphi-\psi)-\varphi\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)+\psi\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\cos(\varphi-\psi)\right]$$
$$+R^2\sin(\varphi-\psi)\left[1-(\varphi+\psi)\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)+\left(1+\varphi\,\psi+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right)\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)\right],$$

so daß der betrachtete Kernanteil sich auf die Form bringen läßt

$$\frac{r\,r'+r\,\varrho\sin(\varphi-\psi)-r'\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}{r^2+\varrho^2-2\,r\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\,\frac{1-\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\,\frac{\varphi-\psi\cos(\varphi-\psi)-\left(1+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right)\sin(\varphi-\psi)}{1-\cos(\varphi-\psi)}}{1-(\varphi+\psi)\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)+\left(1+\varphi\,\psi+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right)\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)}.$$

Unter Verwendung der ersten Reihenglieder für cosinus und sinus erhält man für den Bruch im Zähler des zweiten Kernausdruckes den Wert $1/6\,\varphi+5/6\,\psi$, so daß sich ergibt

$$\frac{r\,r'+r\,\varrho\sin(\varphi-\psi)-r'\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}{r^2+\varrho^2-2\,r\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}-\frac{1}{2}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)\,\frac{\frac{5}{6}\varphi+\frac{1}{6}\psi-\left(1+\varphi\,\psi+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right)\left(\frac{r_0'}{R}\right)\cos(\omega t+\lambda)}{1-(\varphi+\psi)\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)+\left(1+\varphi\,\psi+\frac{1}{12}(\varphi-\psi)^2\right)\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)}.$$

Die ersten beiden Glieder sind die aus der bisherigen Theorie bekannten, während das dritte jetzt bei der verfeinerten Theorie zusätzlich auftritt. Wie eine nähere Untersuchung mit Zahlenwerten bis $r_0'/R \leqq 1$ zeigte, kann dieses dritte Glied noch weiter vereinfacht werden, so daß der untersuchte Kernausdruck endgültig folgende Gestalt erhält:

$$\left.\begin{aligned}\frac{r\,r' + r\,\varrho\sin(\varphi-\psi) - r'\,\varrho\cos(\varphi-\psi)}{r^2+\varrho^2-2\,r\,\varrho\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2} - \frac{1}{2}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\cos^2(\omega t+\lambda)\left[\frac{5}{6}\varphi+\frac{1}{6}\psi-\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]&\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Setzt man (23) in die Integralgleichung (22) ein, so ergibt sich, wenn wir gleich zu der der Integralgleichung (I, 14) entsprechenden Form übergehen und den Druckmittelpunkt ψ_0 nach (I, 40) einführen,

$$\left.\begin{aligned}&[2\,\omega\,r_0'\cos(\omega t+\lambda) - 2\,u_0\cos(\varphi+\omega t)]\left[1-\varphi\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right] + 2\,u_0\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin(\varphi+\omega t)\\ &+\sum_{\mu=-6}^{6}{}^{(m)}c_\mu\,e^{i\mu(\varphi+\omega t)} + \frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{\mu=-6}^{6}\left({}^{(m)}k_\mu - \varphi\,{}^{(m)}c_\mu\right)e^{i\mu(\varphi+\omega t)} + \frac{6}{2\pi}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\left[{}^{(m)}A_0\right.\\ &\left.+{}^{(m)}A_6\,e^{6i\omega t}+{}^{(m)}A_{-6}\,e^{-6i\omega t}\right] + \frac{1}{2\pi}{}^{(m-1)}\Gamma(t)\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2\frac{\cos^2(\omega t+\lambda)}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_0'}{R}\right)^2}\left[\frac{5}{6}\varphi+\frac{1}{6}\psi_0-\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\right]\\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-7}^{7}\int_{-\alpha}^{\alpha}{}^{(m)}a_n(\psi)\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}+e^{i\frac{\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{\pi}{3}}{2}+\cdots+e^{i\frac{5\pi}{3}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{5\pi}{3}}{2}\right]d\psi\,e^{in\omega t}.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Integralgleichung (24) gilt für einen 6flügeligen Propeller; die analoge (II, 21) entsprechende Integralgleichung des 4flügeligen Propellers ist aus (24) sofort zu entnehmen, so daß wir sie nicht explizit aufschreiben.

Vergleicht man (24) mit der entsprechenden früheren Integralgleichung (I, 14), so sieht man in übersichtlicher Form die Glieder, die durch die Verfeinerung der Theorie neu hinzugekommen sind. Sie stehen sämtlich auf der linken Seite; durch die vorgenommenen Umformungen haben wir erreicht, daß der Kern der Integralgleichung (24) der gleiche ist wie derjenige von (I, 14). Ohne weiteres ist klar, daß für die Auflösung von (24) genau die gleiche Methode verwendet werden kann wie für (I, 14). Auf eine explizite Weiterverfolgung des Lösungsweges kann daher hier verzichtet werden.

Die durch die Verfeinerung der Theorie neu hinzugekommenen Glieder sind unbedeutend, solange die Flügelsteigung nicht zu groß ist. Teilweise kompensieren sich diese Glieder auch noch gegenseitig. So ist im allgemeinen

$$c_1 \approx \frac{1}{2}(u_0 - \omega\,r_0') \quad \text{bzw.} \quad \frac{2}{3}\,c_1 \approx \frac{1}{2}(u_1 - \omega\,r_0') \text{ bei 4 Flügeln,}$$

wie sich an unseren bisherigen Beispielen gezeigt hat.

Das durch den dritten Anteil des Kernausdruckes (23) bedingte Zusatzglied auf der linken Seite von (24) hat mit unserem bisherigen α-Wert und $r_0'/R = 1/2$ im Durchschnitt die Größe $0{,}006\,\Gamma(t)$; es ist also für $r_0'/R = 1/2$ noch praktisch bedeutungslos.

Im ganzen kann man auf Grund einer überschlägigen Abschätzung sagen, daß sich die Zirkulationsverteilung bei den Beispielen der bisherigen Arbeiten für $r_0'/R = 1/2$ durch die verfeinerte Theorie um durchschnittlich etwa 2% bis 3% ändern würde. Dieses kann in Anbetracht der

Näherungsdarstellung des Geschwindigkeitsfeldes der freien Wirbel und der sonstigen in der Behandlung als ebene Strömung liegenden Vernachlässigungen noch als unerheblich angesehen werden. Für größere Flügelsteigungen $r_0'/R \gtrsim {}^2/_3$ muß für die Bestimmung der Zirkulationsverteilung dann aber doch die Integralgleichung (24) der verfeinerten Theorie zugrunde gelegt werden. In diesem Fall ist auch das genaue Bewegungsgesetz der Propellerflügel etwa (II,10) zu berücksichtigen (vgl. Arbeit II, S. 160).

Aus dem Institut für Angewandte Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

(Eingegangen am 14. Oktober 1957.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. habil. *Wolfgang-Hermann Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

Soeben erschien:

Stenzel/Brosze

Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen

Zweite neubearbeitete Auflage

Von

Dipl.-Phys. O. Brosze

Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost

Mit 149 Abbildungen. IV, 168 Seiten Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen DM 31,50

Inhaltsübersicht: **Einleitung. — Das Schallfeld in großer Entfernung vom Strahler:** Ungebündelte Strahlung. Gebündelte Strahlung: Der Richtfaktor. Der Strahlungsfaktor. — **Das Schallfeld in der Nähe des Strahlers:** Die Gruppe von zwei Einzelstrahlern. Das Schallfeld einer Kolbenmembran. — **Das Schallfeld des Kugelstrahlers:** Der einfache Kugelstrahler bestimmter Ordnung. Der zusammengesetzte Kugelstrahler. Die durch eine starre Kugel verursachte Störung des Schallfeldes. Das Schallfeld in der Umgebung eines starren unendlichen Zylinders. — **Tabellen. — Schrifttum. — Sachverzeichnis.**

Dieses Buch gibt einen Überblick über die Berechnung von Schallvorgängen.

Es wird zunächst die gebündelte Strahlung in großer Entfernung von dem Strahler oder der Strahlergruppe behandelt, nachdem die ungebündelte Strahlung kurz erörtert wurde.

Richt- und Strahlungsfaktor werden definiert.

Bevor auf das Schallfeld in der Nähe des Strahlers eingegangen wird, ist klargestellt, wann ein Aufpunkt zum Nahfeld oder Fernfeld gerechnet werden kann. An Hand verschiedener Beispiele wird das Schallfeld in der Umgebung zweier Strahler als Kurven konstanter Amplitude und konstanter Phase dargestellt. Das Schallfeld verschiedener Kolbenmembranen wird berechnet und graphisch wiedergegeben.

Weiter wird eine Reihe von Kugelstrahlern berechnet und die Störung des Schallfeldes durch eine starre Kugel und einen starren Zylinder bestimmt. Die Schallfeldverzerrung um Kugel und Zylinder wird ebenfalls durch eine Übersicht von Kurven konstanter Schalldruckamplitude ausgedrückt.

Alle Formeln sind so angegeben, daß es dem Leser jederzeit möglich ist, das Schallfeld für einen gewünschten Fall ohne große Schwierigkeiten zu berechnen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Soeben erschien:

Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabwerke

Von

B. G. Neal, M. A., Ph. D. (Cantab.), A. M. I. C. E.

Professor of Civil Engineering und Chairman of Engineering Department, University College of Swansea, früherer Fellow of Trinity Hall und Lecturer in Engineering, University of Cambridge

Ins Deutsche übertragen von Dipl.-Ing. **Thomas Jaeger,** Berlin

Mit 85 Abbildungen. XI, 312 Seiten Gr.-8°. 1958

Ganzleinen DM 48,—

Inhaltsübersicht: Grundlegende Hypothesen. — Einfache Fälle des plastischen Bruches. — Plastischer Bruch. — Grundlegende Sätze und einfache Beispiele. — Allgemeine Verfahren für die plastische Tragwerksbemessung. — Ermittlungen der Ausbiegungen. — Faktoren von Einfluß auf das volle plastische Moment. — Minimalgewichtsbemessung. — Variable wiederholte Belastung. — **Anhang:** A. Plastische Traglasttheorie und Fachwerke. B. Beweise der plastischen Traglastsätze. C. Beweis des Einspiel-Satzes. — Lösungen der Übungsaufgaben. — **Namenverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

Dieses Buch bietet eine geschlossene, lehrbuchartige Darstellung der Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stabwerke aus elastisch-plastischem Material. Es wendet sich an Stahlbau-Statiker, Dozenten und Studenten des konstruktiven Ingenieurbaues. — Nach Darlegung der grundlegenden Hypothesen und Erläuterung des plastischen Versagens einfacher Stabwerke werden die Traglast-Sätze angegeben, auf die sich die folgend erläuterten Verfahren der plastischen Berechnung für einfache proportionale Belastung gründen. Die Ermittlung elastisch-plastischer Ausbiegungen wird behandelt und anschließend die verschiedenen Faktoren, die von Einfluß auf das volle plastische Moment sind. Die Erzielung einer vorgeschriebenen Tragfähigkeit bei minimalem Materialaufwand ist Gegenstand der Minimalgewichtsbemessung; die Prinzipe dieser Weiterentwicklung der einfachen Tragfähigkeitsbemessung werden an Hand eines geometrischen Analogons veranschaulicht und Lösungsverfahren angegeben. Theorie und Verfahren der Traglastberechnung für variable wiederholte Belastung werden dargelegt. — Viele Zahlenbeispiele im Text machen die Darstellung leicht verständlich; Übungsaufgaben mit Lösungen dienen der weiteren Vertiefung des Verständnisses. Umfassende Literaturangaben ermöglichen ein weiteres Eindringen in den behandelten Problemkomplex.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN/GÖTTINGEN/HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.